SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO SUL E SUDESTE DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Ricardo Santos Fagundes

Existência de soluções para uma classe de equações diferenciais fracionárias não lineares com condições de fronteira integral

Marabá

Janeiro 2024

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO SUL E SUDESTE DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Ricardo Santos Fagundes

Existência de soluções para uma classe de equações diferenciais fracionárias não lineares com condições de fronteira integral

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará, como pré-requisito para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Claudionei Pereira de Oliveira.
Área de concentração: ANÁLISE.

Marabá

Janeiro 2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará
Biblioteca Setorial Campus II

F156e Fagundes, Ricardo Santos
Existência de soluções para uma classe de equações diferenciais frácionarias não lineares com condições de fronteira integral / Ricardo Santos Fagundes. — 2024.
70 f.

Orientador (a): Claudionei Pereira de Oliveira.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará, Instituto de Ciências Exatas, Faculdade de Matemática, Curso de Licenciatura em Matemática, Marabá, 2024.

1. Equações diferenciais fracionário. 2. Equações diferenciais não-lineares. 3. Cálculo. I. Oliveira, Claudionei Pereira de, orient. II. Título.

CDD: 22. ed.: 515.353

Elaborado por Marcelo da Silva Gomes – CRB-2/1208

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO SUL E SUDESTE DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Ricardo Santos Fagundes

Existência de soluções para uma classe de equações diferenciais fracionárias não lineares com condições de fronteira integral

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará, como pré-requisito para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Claudionei Pereira de Oliveira.

Data da defesa: ____ / ____ / ________.   CONCEITO: ______________________

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Dr. Claudionei Pereira de Oliveira.
Orientador - FAMAT.

____
Prof. Dr. João Carlos Pantoja Fortes.
Membro 1 - FAMAT.

____
Prof. Dr. Narciso das Neves Soares.
Membro 2 - FAMAT.

Marabá

Janeiro 2024

Agradecimentos

A Deus pelo dom da vida, pela fé e perseverança para superar os obstáculos surgidos ao longo do caminho.

Aos meus pais, Evando Pereira Fagundes e Marly Santos de Oliveira, por serem a minha base, por me darem valores e conselhos que lembrarei por toda a minha vida, por todo o amor que me deram e que mesmo nas dificuldades enfrentadas sempre me deram todo o suporte necessário para continuar no curso.

Aos meus professores do curso, por todos os ensinamentos repassados. Em especial agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Claudionei Pereira de Oliveira, por todo o tempo dedicado nas orientações.

Aos meus colegas e amigos de curso, pelos momentos de companherismo e apoio.

Aos membros da banca, Prof. Dr. João Carlos Pantoja Fortes e Prof. Dr. Narciso das Neves Soares, por aceitarem contribuir com este trabalho.

Resumo

Neste trabalho, estudaremos a existência de soluções para uma classe de equações diferenciais fracionárias não lineares com condições de fronteira integral. A saber

$$(\mathcal{CP}) \begin{cases} {}^{c}D^{q}x(t) = f(x, t(x)), \quad 0 < t < 1, \quad 1 < q \leq 2 \\ x(0) = 0, \quad x(1) = \alpha \int_0^{\eta} x(s)ds, \quad 0 < \eta < 1, \end{cases}$$

onde ${}^{C}D^{q}$ denota o operador derivada fracionária de Caputo de ordem q, $f : [0,1] \times X \to X$ é não linear e contínua, e $\alpha \in \mathbb{R}$ é tal que $\alpha \neq 2/\eta^2$. Impondo condições sobre a não linearidade f, é provado através de Teoremas de Ponto fixo e Teoria do Grau Topológico, a existência de soluções para o problema $(\mathcal{CP})$.

Palavras-chave: Derivada fracionária, equações diferenciais fracionárias, existêcia de soluções.

Abstract

In this paper, we will study the existence of solutions to a class of nonlinear fractional differential equations with integral boundary conditions. These are

$$(\mathcal{CP})\begin{cases} {}^{c}D^{q}x(t) = f(x, t(x)), \quad 0 < t < 1, \quad 1 < q \leq 2 \\ x(0) = 0, \quad x(1) = \alpha \int_0^{\eta} x(s)ds, \quad 0 < \eta < 1, \end{cases}$$

where ${}^{C}D^{q}$ denotes the Caputo fractional derivative operator of order q, $f : [0, 1] \times X \to X$ is nonlinear and continuous, and $\alpha \in \mathbb{R}$ is such that $\alpha \neq 2/\eta^2$. By imposing conditions on the nonlinearity f, the existence of solutions to the problem $(\mathcal{CP})$ is proved by fixed point theorems and topological degree theory.

Key-words:Fractional derivatives, fractional differential equations, existence of solutions.

Sumário

Introdução

O cálculo fracionário ou cálculo diferencial e integral de ordem não inteira, tem sua origem em 1695 em uma carta escrita por L'Hospital endereçada a Leibniz na qual havia o questionamento de uma possível interpretação caso o operador derivação tivesse ordem $n = 1/2$. Para muitos autores esta correspondência por cartas foi o momento de nascimento do Cálculo Fracionário. Assim como Leibniz "previu"em sua resposta, o entendimento desta ideia gerou consequências muito frutíferas, gerando uma nova teoria dentro do Cálculo e da Análise, e em especial no campo das Equações Diferenciais.

Posteriormente a isso outros grandes vieram a fazer importantes contribuições para o crescimento do Cálculo Fracionário, como Laplace que em 1812 definiu a derivada fracionária a partir de uma integral.

Laurent,em 1884, ao discutir os trabalhos de Sonin e Letnikov apresentou uma generalização da fórmula integral de Cauchy. Utilizando integração no plano complexo ele introduziu a forma como hoje conhecemos o operador integral de Riemman-Liouville, dado por

$$ {}_aD_x^{-\alpha} f(x) = {}_aJ_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, $$

(onde Γ é uma função especial que será apresentada na primeira seção do capítulo 1). Esta generalização é considerada um marco na história do cálculo fracionário moderno.

No ano de 1969, Caputo propõe uma nova forma de se definir a derivada fracionária que segue a forma

$$ D_*^{\beta} f(x) = {}_cJ_x^{\alpha} D^n f(x), $$

onde $0 < \alpha < 1$ e n é um inteiro positivo que depende de β. Nesta definição residem diversas vantagens quando se está interessado em uma equação diferencial parcial com dados iniciais.

De ínicio, o Cálculo Fracionário teve desenvolvimento restrito ao campo da matemática pura, sem grandes aplicações em outras áreas, entretanto, Caputo em 1969, em seu livro Elasticit'a e Dissipazione [4] resolveu problemas de viscoelasticidade utilizando a definição de derivada fracionária proposta por ele. O leitor interessado no contexto histórico mais detalhado do Cálculo Fracionário pode consultar [7, 21].

A partir das definições introduzidas por Caputo, nas últimas décadas diversos autores vieram apresentar estudos com modelagens feitas a partir do cálculo Fracionário e mostraram que elas oferecem uma descrição mais fina de fenômenos naturais que aquela feita a partir do cálculo usual. RODRIGUES [18] estudou a versão fracionária do oscilador harmônico, com:

$$ {}_{0}^{C}D_{x}^{\alpha}x(t) + \omega^{\alpha}x(t) = 0, $$

com condições iniciais $x(0) = 1$ e $x'(0) = 0$ sendo $1 < \alpha \leq 2$. Usando o método da transformada de Laplace o autor encontrou a solução

$$ x(t) = E_{\alpha}(-\omega^{\alpha}t^{\alpha}), $$

onde E_{α} é a função de Mittag-Leffler a um parâmetro. Note ainda que no caso extremo $\alpha = 2$ fornece $x(t) = \cos(\omega t)$ que é a solução do problema associado ao oscilador harmônico de ordem inteira.

Tomando os resultados acima como motivação, este trabalho tem como objetivo o estudo de soluções para uma classe de equações diferenciais fracionárias não lineares com condições de fronteira integral. No primeiro capítulo discutiremos o Cálculo Fracionário para funções reais definidas em um intervalo limitado, apresentado as principais definições dos operadores integral e derivada fracionárias.

O capítulo 2 é destinado a abordagem de alguns conceitos relacionados a Topologia dos Espaços Métricos e Grau Topológico, apresentando alguns resultados importantes como o Teorema do Ponto fixo de Banach e o Teorema de Árzela-Ascoli que são de fundamental importância para demonstrarmos alguns dos teoremas do capítulo 3. Além disso, ainda no capítulo 2 abordamos também o Grau Topológico de Brouwer e de Leray-Schauder.

Por fim, no capítulo 3 encontra-se os principais resultados deste trabalho dispondo de toda a teoria já estudada nos capítulos anteriores.

Capítulo 1

Uma revisão do Cálculo Fracionário

Neste capítulo enuciaremos algumas das principais definições e resultados importantes do estudo do Cálculo Fracionário.

1.1 Função gama

Inicíaremos esta seção, comentando sobre o $n!$, que graças as contribuições de Euler podemos expressá-la como

$$n! = \int_0^\infty e^{-t} t^n dt,$$

onde $n \in \mathbb{N}$.

Usaremos esta ideia para generalizar o conceito de fatorial nos números reais, e assim definir a função gama que é de fundamental importância nos estudos do Cálculo Fracionário, tendo em vista que a utilizaremos nas principais definições que aparecerão ao longo deste trabalho.

Definição 1.1 *Seja $x \in \mathbb{R}$ tal que $x > 0$. Define-se a função gama por*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt. \tag{1.1}$$

Proposição 1.1 *Para um valor de $x > 0$ a integral acima é convergente.*

Demonstração: Temos que,

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Calculando a seguinte integral

$$\int_0^1 t^{x-1}dt$$

temos que para $x > 0$

$$\int_0^1 t^{x-1}dt = \left[\frac{t^x}{x}\right]_0^1 = \frac{1}{x} - \frac{0}{x} = \frac{1}{x}.$$

Para $x \leq 0$ temos

$$\int_0^1 t^{x-1}dt = \left[\frac{1}{xt^{-x}}\right]_0^1 = -\infty.$$

Como $t \in (0,1]$ então $e^{-t} \leq 1$ sendo assim

$$0 \leq e^{-t}t^{x-1} \leq t^{x-1}$$

e portanto $\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt$ é convergente.

Queremos agora mostrar a covergência de $\int_1^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$. Temos que para $x > 0$ fixado, $\lim_{t\to\infty} \frac{t^{x+1}}{e^t} = 0$. Então existe um número real $B_x > 0$ (que depende de x fixado), suficientemente grande tal que

$$\frac{t^{x+1}}{e^t} \leq 1, \forall t \geq B_x,$$

dividindo ambos os lados por t^2 obtemos

$$e^{-t}t^{x-1} \leq \frac{1}{t^2}, \forall t \geq B_x.$$

Usando a integral na desigualdade teremos

$$\begin{aligned} \int_1^\infty e^{-t}t^{x-1}dt &\leq \int_{B_x}^\infty \frac{1}{t^2}dt \\ &= \left[-\frac{1}{t}\right]_{B_x}^\infty \\ &= \frac{1}{B_x}. \end{aligned}$$

Assim, $\int_1^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ é convergente. ■

Proposição 1.2 *A função Γ satisfaz as seguintes propriedades:*

$$\Gamma(n) = (n-1)! \text{ se } n \in \mathbb{N} \tag{1.2}$$

e

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \text{ se } x > 0. \tag{1.3}$$

Demonstração: Note que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-r} dr &= \lim_{a\to\infty} \int_0^a e^{-r} dr \\
&= \lim_{a\to\infty} \left[-e^{-r}\right]_0^a \\
&= \lim_{a\to\infty} \left[-\frac{1}{e^b} - \left(-\frac{1}{e^0}\right)\right] \\
&= \lim_{a\to\infty} \left[-\frac{1}{e^b} + 1\right] \\
&= 0 + 1 = 1.
\end{aligned}$$

Seja $t > 0$ uma constante e substituindo na equação $r = st$ teremos:

$$\int_0^\infty e^{-st} t ds = 1,$$

o que implica em

$$\int_0^\infty e^{-st} ds = \frac{1}{t}.$$

Usando a regra de Leibniz, e derivando uma vez teremos

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^\infty e^{-st} ds\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\right) \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-st}\right) ds = -\frac{1}{t^2} \Rightarrow \int_0^\infty s e^{-st} ds = \frac{1}{t^2}.$$

Derivasndo uma segunda vez tem-se

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^\infty s e^{-st} ds\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t^2}\right) \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\left(s e^{-st}\right) ds = -\frac{1.2}{t^3} \Rightarrow \int_0^\infty s^2 e^{-st} ds = \frac{2}{t^3}.$$

Derivando uma terceira vez obtemos

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^\infty s^2 e^{-st} ds\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{2}{t^3}\right) \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\left(s^2 e^{-st}\right) ds = -\frac{1.2.3}{t^4} \Rightarrow \int_0^\infty s^3 e^{-st} ds = \frac{6}{t^4}.$$

Desse modo, derivando n vezes, tem-se

$$\frac{d}{dt^n}\left(\int_0^\infty e^{-st} ds\right) = \frac{d}{dt^n}\left(\frac{1}{t}\right) \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-st}\right) ds = -\frac{n!}{t^{n+1}} \Rightarrow \int_0^\infty s^n e^{-st} ds = \frac{n!}{t^{n+1}}.$$

Para $t = 1$, temos que

$$\int_0^\infty s^n e^{-s} ds = n! \Rightarrow \Gamma(n+1) = \int_0^\infty s^n e^{-s} ds$$

e assim

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty s^{n-1}e^{-s}ds = (n-1)!.$$

Para provar (1.3) basta integrarmos por partes, ou seja:

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^x e^{-t}dt \\
&= \left[-t^x e^{-t}\right]_0^\infty + x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t} \\
&= x\Gamma(x)
\end{aligned}$$

■

Obsevação 1.1 *Segue-se de (1.3) que*

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1), \text{ para } x > 1. \tag{1.4}$$

De fato, por uma integração por partes segue que

$$\begin{aligned}
\Gamma(x) &= \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt \\
&= (x-1)\int_0^\infty e^{-t}t^{x-2}dt \\
&= (x-1)\Gamma(x-1).
\end{aligned}$$

A partir daí, obtemos

$$\frac{1}{\Gamma(x-1)} = \frac{x-1}{\Gamma(x)}. \tag{1.5}$$

Obsevação 1.2 *A função* Γ *não está definida para os valores* $0, -1, -2, -3, ...$ *De fato, é possível ver que a integral em (1.1) diverge se* $x = 0$*, uma vez que*

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^{-t}t^{-1}dt &= \int_0^1 \frac{e^{-t}}{t}dt \\
&= \int_0^1 \frac{1}{te^t}dt \geq \frac{1}{e}\int_0^1 \frac{1}{t}dt \\
&= \frac{1}{e}\left(\left[\ln(t)\right]_0^1\right) \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

Assim como também não está definida para qualquer $x < 0$.

1.2 Integração de ordem inteira

Nesta seção definiremos os operadores de integração de ordem inteira, na qual os usaremos para definir adiante os demais operadores de ordem fracionária, para um estudo mais completo ver [21].

Considere $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $-\infty < a < b < \infty$. Denotamos por $\mathscr{F}([a,b])$ o espaço das funções reais quase sempre definidas no intervalo $[a,b]$, ou seja;

$$\mathscr{F}([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R};\ \text{para q.t.p } x \in [a,b] \text{ existe } f(x) \in \mathbb{R}\}.$$

O espaço das funções reais definidas em $[a,b]$ e quase sempre diferenciáveis em $[a,b]$ será denotado por $dif([a,b])$, a saber:

$$dif([a,b]) = \{f \in \mathscr{F}([a,b]);\ \text{Para q.t.p } x \in [a,b] \text{ existe } f'(x).\}$$

Denotamos o espaço das funções reais definidas e contínuas em $[a,b]$ por $C([a,b])$, e para $n \in \mathbb{N}$

$$C^n([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}; f, f', ..., f^{(n)} \in C([a,b])\}.$$

Além disso, denotamos o espaço das funções absolutamente contínuas por

$$AC([a,b] = \{f \in \mathscr{F}([a,b]); f \ \text{ é absolutamente continua em } [a,b]\}. \tag{1.6}$$

O espaço das funções integráveis á Lebesgue, é denotado por $L^1([a,b])$:

$$L^1([a,b]) = \{f \in \mathscr{F}([a,b]);\ f \text{ é mensurável e } |f| \text{ é integrável á Lebesgue em}[a,b]\}. \tag{1.7}$$

Consideremos os operadores de derivação e integração

$$\begin{aligned} D : dif([a,b]) &\to \mathscr{F}([a,b]) \\ f &\mapsto DF = f' \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} I_{a+} : L^1([a,b]) &\to AC([a,b]) \\ f &\mapsto I_{a+}f, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} I_{a+}f : [a,b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto I_{a+}f(x) = \int_a^x f(t)dt. \end{aligned}$$

Da teoria de integração de Lebesgue, sabemos ser válido o seguinte teorema, o principal que relaciona os operadores D e I_{a+}:

Teorema 1.1 *(Teorema Fundamental do Cálculo)*

(i) Dada $f \in L^1([a,b])$, então $D(I_{a+}f) = f$ q.s em $[a,b]$;

(ii) Dada $f \in AC([a,b])$, então $Df \in L^1([a,b]$ e $\int_a^x Df(t)dt = f(x) - f(a), \forall x \in [a,b]$.

Demonstração: ver [5].

O Teorema Fundamental do Cálculo diz que o operador D é o inverso à esquerda de I_{a+}.

Definimos as potências dos operadores de D e I_{a+} do seguinte modo;

$$\begin{cases} D^1 &= D \\ D^n &= D(D^{n-1}), n \geq 2 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} I^1_{a+1} &= I_{a+1} \\ I^n_{a+1} &= I_{a+1}(I^{n-1}_{a+1}), n \geq 2. \end{cases}$$

Ao aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo n vezes, concluímos que

$$D^n(I_{a+1}) = f, \forall f \in L^1([a,b]), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definição 1.2 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $-\infty < a < b < \infty$ e $n \in \mathbb{N}_0$. Os operadores de integração de ordem n, denotados por I^n_{a+} e I^n_{b-}, são definidos por*

$$\begin{aligned} I^n_{a+} : L^1([a,b]) &\rightarrow L^1([a,b]) \\ f &\mapsto I^n_{a+}f \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} I^n_{b-} : L^1([a,b]) &\rightarrow L^1([a,b]) \\ f &\mapsto I^n_{b-}f, \end{aligned}$$

onde, para $x \in [a,b]$,

$$\begin{cases} (I^0_{a+}f)(x) = f(x) \\ (I^1_{a+}f)(x) = (I_{a+}f)(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt \\ (I^n_{a+}f)(x) = I_{a+}(I^{n-1}_{a+}f), \quad n \geq 2, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} (I^0_{b-}f)(x) = f(x) \\ (I^1_{b-}f)(x) = (I_{b-}f)(x) = \displaystyle\int_x^b f(t)dt \\ (I^n_{b-}f)(x) = I_{b-}(I^{n-1}_{b-}f), \quad n \geq 2. \end{cases}$$

Note que para obtermos a imagem do operador I^n_{a+}, de uma função $f \in L^1([a,b])$, é necessário calcular n integrais definidas, ou seja,

$$(I^n_{a+})(x) = \int_a^x \int_a^{x_1} \int_a^{x_2} \cdots \int_a^{x_{n-2}} \int_a^{x_{n-1}} f(x_n)dx_n dx_{n-1} \cdots dx_3 dx_2 dx_1.$$

O mesmo ocorre para o operador I^n_{b-}, cuja expressão acima é análoga.

Um fato crucial é que podemos obter I^n_{a+} e I^n_{b-} sem a necessidade de calcular n integrais. O volume de cálculos pode ser reduzido a calcularmos diretamente apenas uma integral, e para tratarmos deste fato, definimos uma família de funções da seguinte forma:

Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixo e $x \in [a,b]$ definimos as funções

$$\begin{aligned} \phi_n(x) : [a,x] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \phi_n(x)(t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \psi_n(x) : [x,b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \psi_n(x)(t) = \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}. \end{aligned}$$

Obsevação 1.3 *Para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in (a,b)$ temos que*

$$(i) \begin{cases} \phi_n(x) \in C([a,x]); \\ \psi_n(x) \in C([x,b]). \end{cases}$$

$$(ii) \begin{cases} \phi_n(x)(x) = \psi_n(x)(x) = 0 \\ \phi_n(x)(t) > 0, \forall t \in (a,x); \\ \psi_n(x)(t) > 0, \forall t \in (x,b). \end{cases}$$

$$(iii)\begin{cases} \phi_1(x)'(t) = 0, \forall t \in (a,x); \\ \phi_n(x)'(t) = -\phi_{n-1}(x)(t), \forall t \in (a,x), n \geq 2; \\ \psi_1(x)'(t) = 0, \forall t \in (x,b); \\ \psi_n(x)'(t) = \psi_{n-1}(x)(t), \forall t \in (x,b), n \geq 2. \end{cases}$$

(iv) para $n \geq 2$, $\phi_n(x)$ é decrescente em (a,x) e $\psi_n(x)$ é crescente em (x,b).

Obsevação 1.4 *Para $n \in \mathbb{N}$ temos*

$$\begin{aligned} \phi_n : (a,b) &\rightarrow C([a,x]) \\ x &\mapsto \phi_n(x) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \psi_n : (a,b) &\rightarrow C([a,x]) \\ x &\mapsto \psi_n(x). \end{aligned}$$

Lema 1.1 *Para $n \in \mathbb{N}$, $x \in (a,b)$ e $f \in L^1([a,b])$ segue que*

$$\phi_n(x)f \in L^1([a,x]) \text{ e } \psi_n(x)f \in L^1([x,b]).$$

Demonstração: De fato, $\phi_1 f = f$ e para $n \geq 2$ tem-se para q.t.p. $t \in [a,x]$.

$$|\phi_n(x)(t)f(t)| \leq \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}|f(t)|,$$

cuja função á direita da desigualdade acima pertence a $L^1([a,x])$. Da mesma forma, $\psi_1(x)f = f$ e para $n \geq 2$ tem-se para q.t.p $t \in [x,b]$.

$$|\psi(x)(t)f(t)| \leq \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)}|f(t)|,$$

sendo a função à direita da desigualdade acima pertencente a $L^1([x,b])$. ■

Como consequência da observação acima, estão bem definidas as funções

$$\begin{aligned} G_n(f) : [a,b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto G_n(f)(x) = \int_a^x \phi_n(x)(t)f(t)dt = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)dt \end{aligned}$$

e

$$\begin{array}{rcl} H_n(f):[a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & H_n(f)(x) = \displaystyle\int_a^x \psi_n(x)(t)f(t)dt = \int_a^x \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)dt. \end{array}$$

Teorema 1.2 *Seja $n \in \mathbb{N}$ e $f \in L^1([a,b])$, então*

$$I_{a+}^n f = G_n(f) \quad e \quad I_{b-}^n f = H_n(f),$$

isto é,

$$(I_{a+}^n f)(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)dt, \forall x \in [a,b]$$

e

$$(I_{b-}^n f)(x) = \int_x^b \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)dt, \forall x \in [a,b].$$

Demonstração: Faremos a prova da primeira igualdade por indução sobre n. A demosntração da segunda igualdade é análoga.

Paran $n=1$, da definição do operador I_{a+}^n, temos

$$(I_{a+}^1 f)(x) = \int_a^x \phi_1(x)(t)f(t)dt = G_1(f)(x), \forall x \in [a,b].$$

Suponha que o resultado seja válido para $n \geq 1$, ou seja,

$$(I_{a+}^n f)(x) = \int_a^x \phi_n(x)(t)f(t)dt = G_n(f)(x), \forall x \in [a,b].$$

Assim segue que

$$\begin{aligned} (I_{a+}^{n+1} f)(x) &= [I_{a+}(I_{a+}^n f)](x) \\ &= \int_a^x (I_{a+}^n f)(t)dt \\ &= \int_a^x G_n(t)dt \\ &= \int_a^x \int_a^t \phi_n(t)(s)f(s)dsdt \\ &= \int_a^x \int_a^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}f(s)dsdt \\ &= \int_a^x \int_s^x \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}f(s)dsdt. \end{aligned}$$

Calculando a última igualdade, temos que,

$$\begin{aligned}
(I_{a+}^{n+1}f)(x) &= \int_a^x \int_s^x \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s) ds dt \\
&= \int_a^x f(s) \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{(t-s)^n}{n} \right]_{t=s}^{t=x} ds \\
&= \int_a^x f(s) \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{(x-s)^n}{n} \right] ds \\
&= \int_a^x f(s) \frac{(x-s)^n}{n!} ds \\
&= \int_a^x \phi_{(n+1)}(x)(s) f(s) ds \\
&= G_{(n+1)}(f)(x).
\end{aligned}$$

■

1.3 Integrais de Riemann-Liouville

Para generalizar os operadores integrais I_{a+}^n e I_{b-}^n para $n \in \mathbb{R}, n \geq 0$, introduzimos a função Γ e também as funções ϕ_n e ψ_n. Para cada $\alpha > 0$, definiremos as seguintes funções

$$\begin{aligned}
\phi_\alpha(x) : [a,x] &\to \mathbb{R} \\
t &\mapsto \phi_\alpha(x)(t) = \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\psi_\alpha(x) : [x,b] &\to \mathbb{R} \\
t &\mapsto \psi_\alpha(x)(t) = \frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.
\end{aligned}$$

Temos aqui que quando $0 < \alpha < 1$, temos $-1 < \alpha - 1 < 0$ e portanto, as funções $\phi_\alpha(x)$ e $\psi_\alpha(x)$ terão singularidades no ponto $t = x$.

Lema 1.2 *Temos que* $\int_a^x \phi_\alpha(x)(t)dt$ *e* $\int_x^b \psi_\alpha(x)(t)dt$ *convergem e são dadas por*

$$\int_a^x \phi_\alpha(x)(t)dt = \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \quad e \quad \int_x^b \psi_\alpha(x)(t)dt = \frac{(b-x)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Demonstração: Sabemos que

$$\phi_\alpha(x)(t) = \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

logo,

$$\begin{aligned}
\int_a^x \phi_\alpha(x)(t)dt &= \int_a^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lim_{\xi\to x^-}\int_a^\xi (x-t)^{\alpha-1}dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lim_{\xi\to x^-}\left[\frac{-(x-t)^\alpha}{\alpha}\right]_a^\xi \\
&= \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\lim_{\xi\to x^-}\left[-(x-t)^\alpha\right]_a^\xi \\
&= -\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\lim_{\xi\to x^-}\left[(x-t)^\alpha\right]_a^\xi \\
&= -\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\lim_{\xi\to x^-}\left[(x-\xi)^\alpha-(x-a)^\alpha\right] \\
&= -\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left[(x-x)^\alpha-(x-a)^\alpha\right] \\
&= \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

Para verificar $\int_a^x \psi_\alpha(x)(t)dt$ é análogo.

$$\begin{aligned}
\int_x^b \phi_\alpha(x)(t)dt &= \int_x^b \frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (t-x)^{\alpha-1}dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lim_{\xi\to x^+}\int_\xi^b (t-x)^{\alpha-1}dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lim_{\xi\to x^+}\left[\frac{-(t-x)^\alpha}{\alpha}\right]_\xi^b \\
&= \frac{1}{\alpha\Gamma(\beta)}\lim_{\xi\to x^+}\left[(t-x)^\alpha\right]_\xi^b \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\lim_{\xi\to x^-}\left[(b-x)^\alpha-(\xi-x)^\alpha\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left[(b-x)^\alpha-(x-x)^\alpha\right] \\
&= \frac{(b-x)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

A questão crucial para a definição dos operadores I^{α}_{a+} e I^{α}_{b-} para $\alpha > 0$ é garantir que para toda $f \in L^1([a,b])$ e $x \in [a,b]$ tenhamos

$$\phi_\alpha(x) f \in L^1([a,b]) \ \text{ e } \ \psi_\alpha(x) f \in L^1([a,b]).$$

Com efeito, se $\alpha \leq 1$, pelo Lema 1.1 $\phi_\alpha(x)$ e $\psi_\alpha(x)$ são bem comportadas e assim, claramente concluímos que as pertinências acima ocorrem para todo $x \in [a,b]$. Quando $0 < \alpha < 1$ é necessária uma análise diferente e um pouco mais elaborada. Considere as funções, para $x \in (a,b)$ e $f \in L^1([a,b])$,

$$\widetilde{\Phi}_\alpha(u) = \begin{cases} \dfrac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{se} \quad 0 < u \leq x - a, \\ \\ 0, & \text{se} \quad u \leq 0 \ \text{ ou } \ u \geq x - a \end{cases}$$

e

$$\widetilde{f}(u) = \begin{cases} f(u), & \text{se} \quad u \in [a,b] \\ 0, & \text{se} \quad u < a \ \text{ ou } \ u > b. \end{cases}$$

Temos que $\widetilde{\Phi}_\alpha, \widetilde{f} \in L^1(\mathbb{R})$, então pela teoria de integração existe a convolução $(\widetilde{\Phi}_\alpha * \widetilde{f})$, a qual é uma função integrável. Para $x \in (a,b)$,

$$\begin{aligned} (\widetilde{\Phi}_\alpha * \widetilde{f})(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\Phi}_\alpha(x-t)\widetilde{f}(t)dt \overset{(\star)}{=} \int_a^b \widetilde{\Phi}_\alpha(x-t)\widetilde{f}(t)dt \\ &\overset{(\star\star)}{=} \int_a^x \widetilde{\Phi}_\alpha(x-t)\widetilde{f}(t)dt = \int_a^x \phi_\alpha(x)(t) f(t)dt, \end{aligned}$$

onde a igualdade $(\star)$ é justificada pois $\widetilde{f} \equiv 0$ em $\mathbb{R} \backslash [a,b]$ e a igualdade $(\star\star)$ é válido pois se $t > x$ então $x - t < 0$, e portanto $\widetilde{\Phi}_\alpha(x-t) = 0$.

A sequência de igualdades acima mostra então que $\phi_\alpha(x) f \in L^1([a,x])$, e além disso,

$$\int_a^{\bullet} \phi_\alpha(\bullet)(t) f(t)dt \in L^1([a,b]).$$

Analogamente a isto, dado $x \in (a,b)$ e $f \in L^1([a,b])$, defina

$$\widetilde{\Psi}_\alpha(u) = \widetilde{\Phi}_\alpha(-u) = \begin{cases} \dfrac{(-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{se} \quad x - b \leq u < 0 \\ 0, & \text{se} \quad u \geq 0 \ \text{ ou } \ u < x - b \end{cases}$$

e

$$\widetilde{f}(u) = \begin{cases} f(u) & \text{se} \quad u \in [a,b], \\ \\ 0 & \text{se} \quad u \notin [a,b]. \end{cases}$$

Temos que $\widetilde{\Psi}_\alpha, \widetilde{f} \in L^1(\mathbb{R})$, portanto está bem definida a convolução $(\widetilde{\Psi}_\alpha * \widetilde{f})$, a qual é integrável em $\mathbb{R}$. Para $x \in (a,b)$, calculamos.

$$\begin{aligned} (\widetilde{\Psi}_\alpha * \widetilde{f})(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\Psi}_\alpha(x-t)\widetilde{f}(t)dt = \int_a^b \widetilde{\Psi}_\alpha(x-t)\widetilde{f}(t)dt \\ &= \int_x^b \widetilde{\Psi}_\alpha(x-t)\widetilde{f}(t)dt = \int_x^b \psi_\alpha(x)(t)f(t)dt. \end{aligned}$$

Assim usando argumentos similares aos anteriores, temos que $\psi_\alpha(x)f \in L^1([a,x])$ e

$$\int_a^\bullet \psi_\alpha(\bullet)(t)f(t)dt \in L^1([a,b]).$$

Agora podemos definir uma generalização dos operadores I^n_{a+} e I^n_{b-}.

Definição 1.3 *Seja $\alpha > 0$ e $[a,b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo compacto de $\mathbb{R}(-\infty < a < b < \infty)$. Definimos os operadores integrais de Riemann-Liouville de ordem α, por*

$$\begin{aligned} I^\alpha_{a+} : L^1([a,b]) &\to L^1([a,b]) \\ f &\mapsto I^\alpha_{a+}f, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} (I^\alpha_{a+}f) : [a,b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (I^\alpha_{a+}f)(x) = \int_a^x \phi_\alpha(x)(t)f(t)dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} I^\alpha_{b-} : L^1([a,b]) &\to L^1([a,b]) \\ f &\mapsto I^\alpha_{b-}f, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} (I^\alpha_{b-}f) : [a,b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (I^\alpha_{b-}f)(x) = \int_a^x \psi_\alpha(x)(t)f(t)dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (t-x)^{\alpha-1}f(t)dt. \end{aligned}$$

As funções $(I^{\alpha}_{a+}f)$ *e* $(I^{\alpha}_{b-}f)$ *são denominadas, respectivamente, integrais fracionárias de Riemann-Liouville de ordem* α *á esquerda e á direita da função* f*.*

Para o caso $\alpha = 0$ *definimos* $(I^{0}_{a+}f)(x) = (I^{0}_{b-}f)(x) = f(x), \forall x \in [a,b]$.

Obsevação 1.5 *Haja vista o Teorema 1.2, vemos que a definição acima retorna nas integrais de ordem inteira quando tomamos* $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$*. De fato, para o caso inteiro as integrais fracionárias de Riemann-Liouville se dão por*

$$\begin{cases} (I^{\alpha}_{a+}f)(x) &= f(x), \text{ se } \alpha = 0, \\ (I^{\alpha}_{b-}f)(x) &= f(x), \text{ se } \alpha = 0, \\ (I^{\alpha}_{a+}f)(x) &= (I^{n}_{a+}f)(x), \text{ se } \alpha \in \mathbb{N}, \\ (I^{\alpha}_{b-}f)(x) &= (I^{n}_{b-}f)(x), \text{ se } \alpha \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1.4 Derivadas de Riemann-Liouville

Nesta seção introduziremos o conceito do operador de derivação de ordem não inteira de Riemann-Liouville.

Proposição 1.3 *Sejam* $m, n \in \mathbb{N}_0$ *com* $m > n$ *e* $f \in C^n([a,b])$*. Então*

$$D^n f = D^m \left(I^{m-n}_{a+}\right).$$

Demonstração: Como $m > n$ temos que $(m-n) \in \mathbb{N}$ para $f \in C^n([a,b])$, sabemos que

$$f = D^{m-n}\left(I^{m-n}_{a+}\right).$$

Usando o Teorema fundamental do cálculo e aplicando D^n em ambos os membros dessa igualdade, temos

$$D^n f = D^n\left(D^{m-n}(I^{m-n}_{a+})\right) = D^{n+m-n}\left(I^{m-n}_{a+}\right) = D^m\left(I^{m-n}_{a+}\right),$$

como queríamos mostrar. ■

A partir da Proposição 1.3 podemos definir formalmente os operadores de derivação de ordem não inteira.

Dado $\alpha \geq 0$, seja $n = [\alpha]+1$, onde $[\alpha]$ denota a parte inteira do número real não negativo α. Defina

$$D^{\alpha}_{a+}f = D^n(I^{n-\alpha}_{a+}f) \text{ e } D^{\alpha}_{b-}f = (-D)^n(I^{n-\alpha}_{b-}f), \tag{1.8}$$

sendo $D = \dfrac{d}{dx}$ o operador de derivação usual de ordem 1 e $D^n = \dfrac{d^n}{dx^n}$ o operador derivação de ordem inteira n.

Podemos observar que quando $\alpha = n \in \mathbb{N}$, temos

$$D^{n}_{a+}f = D^{n+1}(I_{a+}f) = D^n(D(I_{a+f})) = D^n f,$$

ou seja, D^{α}_{a+} coincide com o operador derivada usual no caso inteiro.

Enfatizamos que a definição em (1.8) tem caráter formal, ou seja, não tivemos qualquer preocupação com a existência das expressões envolvidas. Para estruturarmos rigorosamente esta definição, devemos tomar f em uma classe tal que (1.8) faça sentido, ou seja, f deve ser tal que existam $I^{n-a}_{a+}f$ e $I^{n-a}_{b-}f$ e estas funções possam ser derivadas n vezes.

Denotamos os domínios dos operadores D^{α}_{a+} e D^{α}_{b-} por $Dom(D^{\alpha}_{a+})$ e $Dom(D^{\alpha}_{b-})$. Podemos ver que

- Para $0 \leq \alpha < 1 \Rightarrow Dom(D^{\alpha}_{a+}) = \{f \in L^1([a,b]); (I^{1-\alpha}_{a+}f) \in dif([a,b])\}$;
- Para $1 \leq \alpha < 2 \Rightarrow Dom(D^{\alpha}_{a+}) = \{f \in L^1([a,b]); D(I^{2-\alpha}_{a+}f) \in dif([a,b])\}$;
- Para $2 \leq \alpha < 3 \Rightarrow Dom(D^{\alpha}_{a+}) = \{f \in L^1([a,b]); D^2(I^{3-\alpha}_{a+}f) \in dif([a,b])\}$,

e assim por diante. De modo geral, para $\alpha > 0$, temos

$$Dom(D^{\alpha}_{a+}) = \{f \in L^1([a,b]); D^{[\alpha]}(I^{n-\alpha}_{a+}f) \in dif([a,b])\},$$

e analogamente,

$$Dom(D^{\alpha}_{b-}) = \{f \in L^1([a,b]); D^{[\alpha]}(I^{n-\alpha}_{b-}f) \in dif([a,b])\},$$

onde $[\alpha]$ denota a parte inteira de α, que coincide com $n-1$, na notação que estamos utilizando.

Definição 1.4 *Sejam $\alpha \geq 0, [a,b] \subset \mathbb{R}$ com $-\infty < a < b < \infty$ e $n = [\alpha] + 1$. Definimos os operadores derivadas de Riemann-Liouville de ordem α, por*

$$\begin{aligned} D^\alpha_{a+} : Dom(D^\alpha_{a+}) &\to \mathscr{F}([a,b]) \\ f &\mapsto D^\alpha_{a+} f = D^n (I^{n-\alpha}_{a+} f) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} D^\alpha_{b-} : Dom(D^\alpha_{b-}) &\to \mathscr{F}([a,b]) \\ f &\mapsto D^\alpha_{b-} f = (-D)^n (I^{n-\alpha}_{b-} f), \end{aligned}$$

onde $D^n = \dfrac{d^n}{dx^n}$ denota o operador derivação usual de ordem inteira n. Mais explicitamente, temos

$$(D^\alpha_{a+})(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt \tag{1.9}$$

e

$$(D^\alpha_{b-})(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1} f(t)dt. \tag{1.10}$$

As funções (D^α_{a+}) e (D^α_{b-}) são denominadas, respectivamente, derivadas fracionárias (de ordem α) de Riemann-Liouville à esquerda e à direita da função f.

1.5 Derivadas de Caputo em domínios limitados

Definiremos nesta seção os operadores de derivada de caputo que serão utilizados no problema principal deste trabalho.

Definição 1.5 *Sejam $\alpha \geq 0, [a,b] \subset \mathbb{R}$ com $-\infty < a < b < \infty$ e D^α_{a+} e D^α_{b-} as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville de ordem α. Considerando*

$$\begin{cases} n = [\alpha] + 1, & se \;\; \alpha \notin \mathbb{N}_0 \\ n = \alpha, & se \;\; \alpha \in \mathbb{N}_0 \end{cases}, \tag{1.11}$$

definimos os operadores derivadas de Caputo de ordem α, ${}^C D^\alpha_{a+} : Dom(D^\alpha_{a+}) \to \mathscr{F}([a,b])$ e ${}^C D^\alpha_{b-} : Dom(D^\alpha_{b-}) \to \mathscr{F}([a,b])$ por

$$\left({}^C D^\alpha_{a+} f\right)(x) = \left(D^\alpha_{a+}[f - p_a]\right)(x), \tag{1.12}$$

e

$$\left({}^{C}D^{\alpha}_{b-}f\right)(x) = \left(D^{\alpha}_{b-}[f - p_b]\right)(x), \tag{1.13}$$

com

$$p_a(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k \quad e \quad p_b(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{k!}(b-t)^k.$$

As funções $\left({}^{C}D^{\alpha}_{a+}f\right)$ *e* $\left({}^{C}D^{\alpha}_{b-}f\right)$ *são, respectivamente, denominadas derivadas fracionárias de Caputo de* f *à esquerda e à direita.*

Obsevação 1.6 *Para* $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ *é imediato que recaímos na derivada usual de ordem inteira, ou seja*

$$\left({}^{C}D^{\alpha}_{a+}f\right) = (D^n f)(x) \tag{1.14}$$

e

$$\left({}^{C}D^{\alpha}_{b-}f\right) = (-1)^n (D^n f)(x). \tag{1.15}$$

Porém, se $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ *as definições em (1.12) e (1.13) podem ser escritas de forma mais explícita por*

$$\left({}^{C}D^{\alpha}_{a+}f\right) = \left(D^{\alpha}_{a+}f\right) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha} \tag{1.16}$$

e

$$\left({}^{C}D^{\alpha}_{b-}f\right) = \left(D^{\alpha}_{b-}f\right) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(b-x)^{k-\alpha}. \tag{1.17}$$

Obsevação 1.7 *Se* $\alpha \notin \mathbb{N}_0$*, as derivadas de Caputo e de Riemann-Liouville de ordem* α *coincidem nos seguintes casos:*

(*i*) - $\left({}^{C}D^{\alpha}_{a+}f\right)(x) = \left(D^{\alpha}_{a+}f\right)(x)$, *se* $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)} = 0$, *com* n *dado por (1.11);*

(*ii*) - $\left({}^{C}D^{\alpha}_{b-}f\right)(x) = \left(D^{\alpha}_{b-}f\right)(x)$, *se* $f(b) = f'(b) = \cdots = f^{(n-1)} = 0$, *com* n *dado por (1.11).*

Assim como fizemos com as derivadas de Riemann-Liouville, ao restringir o domínio do operador, é possível obter mais resultados. O próximo teorema apresenta uma propriedade importante ao considerarmos funções de classe $AC^n([a,b])$, que em resumo diz que a derivada de Caputo de uma função f pode ser calculada através de uma integral fracionária da derivada usual da função f.

Teorema 1.3 *Sejam $\alpha \geq 0$ e n dado por (1.11). Se $f \in AC^n([a,b])$, então*

(i) - *se $\alpha \notin \mathbb{N}_0$, então*

$$\left({}^C D^{\alpha}_{a+} f\right)(x) = \left(I^{n-\alpha}_{a+} D^n f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)dt \tag{1.18}$$

e

$$\left({}^C D^{\alpha}_{b-} f\right)(x) = (-1)^n \left(I^{n-\alpha}_{b-} D^n f\right)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)dt. \tag{1.19}$$

(ii) - *Se $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$, então ${}^C D^{\alpha}_{a+} f$ e ${}^C D^{\alpha}_{b-} f$ são dadas por (1.14) e (1.15).*

Demonstração: Se $\alpha \notin \mathbb{N}_0$, a partir das definições das derivadas de Caputo e de Riemann-Liouville, temos

$$\begin{aligned}
\left({}^C D^{\alpha}_{a+} f\right)(x) &= \left(D^{\alpha}_{a+}[f - p_a]\right)(x) \\
&= \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I^{n-\alpha}_{a+}[f - p_a])(x) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right] dt.
\end{aligned}$$

Fazendo integração por partes obteremos

$$\begin{aligned}
\left({}^C D^{\alpha}_{a+} f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left\{ \left[\frac{(x-t)^{n-\alpha}}{(n-\alpha)} \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right)\right]_{t=a}^{t=x} \right. \\
&+ \left. \int_a^x \frac{(x-t)^{n-\alpha}}{(n-\alpha)} \frac{d}{dt} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right] dt \right\} \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left\{ \frac{(x-t)^{n-\alpha}}{(n-\alpha)} [f(a) - f(a)] \right. \\
&+ \left. \int_a^x \frac{(x-t)^{n-\alpha}}{(n-\alpha)} \left[f'(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}(t-a)^{(k-1)}\right] dt \right\} \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \left[f'(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}(t-a)^{(k-1)}\right] dt \\
&\vdots \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right) \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} [f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(a)] dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)} dt \\
&= \left(I^{n-\alpha}_{a+} D^n f\right)(x).
\end{aligned}$$

e repetindo os mesmos passos prova-se (1.19). ■

Agora definimos os operadores de derivada de caputo, podemos enunciar o próximo lema nos será útil para demonstrar o Lema 3.1, presente no capítulo 3.

Lema 1.3 *Para $\alpha > 0$, a solução geral da equação diferencial fracionária ${}^C D_{a+}^{\alpha} x(t) = 0$ é dado por:*

$$x(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1} t^{n-1},$$

onde $c_i \in \mathbb{R},\ i = 0, 1, 2, ..., n-1$.
deste modo

$$I_{a+}^{\alpha}\ {}^C D_{a+}^{\alpha} x(t) = x(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1} t^{n-1},$$

onde $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, ..., n-1$.

Demonstração: ver [6]

1.6 Integrais de Liouville

O tópico desta seção tem bastante semelhanças com os conteúdos abordados nas seções anteriores, com tudo é válido destacar essas semelhanças, evidenciando as adaptações necessárias para definir integrais de funções reais cujo domínio é $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ o semieixo real positivo.

De modo a definir operadores correspondentes àqueles apresentados na Definição 1.3, fixemos algumas notações para classes de funções que serão aqui consideradas.

Representamos por $\mathscr{F}([0, \infty))$ o espaço das funções reais quase sempre definidas no intervalo não limitado $[0, \infty)$, ou seja,

$$\mathscr{F}([0, \infty)) = \{f : [0, \infty) \to \mathbb{R};\ \text{para q.t.p. } x \in [0, \infty) \text{ existe } f(x) \in \mathbb{R}\}. \tag{1.20}$$

Por $L^1([0, \infty))$ denotamos as funções integráveis à Lebesgue em $[0, \infty)$ e por $L^1_{loc}([0, \infty))$ denotamos o espaço das funções localmente integráveis à Lebesgue em $\mathbb{R}_+$, isto é

$$L^1_{loc}([0, \infty)) = \{f \in \mathscr{F}([0, \infty));\ \text{para cada } \ b > 0 \text{ temos } f \in L^1([0, b])\}. \tag{1.21}$$

Deste modo, é natural pensarmos a partir da Definição 1.3 definir integrais de ordem arbitrária de funções $f \in \mathscr{F}([0,\infty))$ por

$$(I^\alpha_{0+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt \tag{1.22}$$

e

$$(I^\alpha_{-}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^\infty (t-x)^{\alpha-1}f(t)dt. \tag{1.23}$$

Obviamente, é necessário que tais integrais convirjam, de modo que as expressões acima façam sentido.

Definição 1.6 *Seja $\alpha > 0$. Definimos o operador integral de Liouville de ordem α, à esquerda, por*

$$\begin{aligned} I^\alpha_{0+} : L^1_{loc}([0,\infty)) &\rightarrow L^1_{loc}([0,\infty)) \\ f &\mapsto I^\alpha_{0+}f, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} (I^\alpha_{0+}f) : [0,\infty) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto (I^\alpha_{0+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt. \end{aligned} \tag{1.24}$$

A função $(I^\alpha_{0+}f)$ é denominada integral fracionária de Liouville (de ordem α) à esquerda da função f.

Analogamente, a integral fracionária de Liouville (de ordem α) à direita da função f é dada por

$$\begin{aligned} (I^\alpha_{-}f) : [0,\infty) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto (I^\alpha_{-}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^\infty (t-x)^{\alpha-1}f(t)dt. \end{aligned} \tag{1.25}$$

onde a função f é suficientemente regular, de forma que a integral em (1.25) faça sentido.

1.7 Derivadas de Liouville

Assim como na seção anterior, a definição de derivadas fracionárias no semieixo segue os moldes apresentados na Definição 1.4. Dessa forma, é desejável definir os operadores derivadas de Liouville, que serão denotados por D^{α}_{0+} e D^{α}_{-}, para funções $f \in \mathscr{F}([0,\infty))$ por $D^n I^{n-\alpha}_{0+} f$ e $D^n I^{n-\alpha}_{-} f$, ou mais explicitamente,

$$(D^{\alpha}_{0+})(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt \tag{1.26}$$

e

$$(D^{\alpha}_{-})(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^{\infty} (t-x)^{n-\alpha-1} f(t)dt. \tag{1.27}$$

Asim, como fizemos anteriormente, é de suma importância ter consciência de quais funções admitem as operações acima. Assim, um espaço no qual faz sentido a definição dos operadores D^{α}_{0+} e D^{α}_{-} é o espaço das funções infinitamente diferenciáveis e de suporte compacto em $[0,\infty)$

$$C_0^{\infty}([0,\infty)) = \{f \in C^{\infty}([0,\infty)); \exists [a,b] \subset (0,\infty) \text{ tal que } f(x) = 0, \forall x \in [0,\infty)\backslash[a,b]\}. \tag{1.28}$$

Um ponto negativo de definir a derivada em questão no espaço $C_0^{\infty}([0,\infty))$ é que este é extremamente restrito. Desejamos considerar uma gama maior de funções, portanto definimos os operadores em espaços $Dom(D^{\alpha}_{0+})$ e $Dom(D^{\alpha}_{-})$ análogos aos definidos na Seção 1.5, ou seja,

$$Dom(D^{\alpha}_{a+}) = \{f \in L^1([0,\infty)); D^{[\alpha]}(I^{n-\alpha}_{a+} f) \in dif([0,\infty))\},$$

e

$$Dom(D^{\alpha}_{-}) = \{f \in L^1([0,\infty)); D^{[\alpha]}(I^{n-\alpha}_{-} f) \in dif([0,\infty))\}.$$

O conjunto

$$K^{\alpha}([0,\infty)) = \{f \in L^1([0,\infty)); (I^{n-\alpha}_{a+} f) \in AC^n([0,\infty))\} \tag{1.29}$$

também pode ser considerado em meio à nossa análise, como recurso para se obter funções de regularidade $L^1([0,\infty))$.

Definição 1.7 *Sejam $\alpha \geq 0, n = [\alpha]+1$. Definimos os operadores derivadas de Liouville de ordem α, por*

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{0+} : Dom(D^{\alpha}_{0+}) &\rightarrow \mathscr{F}([0,\infty)) \\ f &\mapsto D^{\alpha}_{0+} f = D^n(I^{n-\alpha}_{0+} f), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}(D^{\alpha}_{0+}f):[0,\infty) &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto (D^{\alpha}_{0+}f)(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1}f(t)dt \qquad (1.30)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}D^{\alpha}_{-}:Dom(D^{\alpha}_{-}) &\to \mathscr{F}([0,\infty))\\ f &\mapsto D^{\alpha}_{-}f=D^n(I^{n-\alpha}_{-}f),\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}(D^{\alpha}_{-}f):[0,\infty) &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto (D^{\alpha}_{-}f)(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(-\frac{d}{dx}\right)^n\int_x^{\infty} (t-x)^{n-\alpha-1}f(t)dt \qquad (1.31)\end{aligned}$$

As funções $(D^{\alpha}_{0+}f)$ e $(D^{\alpha}_{-}f)$ são denominadas, respectivamente, derivadas fracionárias de Liouville (de ordem α) à esquerda e à direita da função f.

Exemplo 1.1 *Determine a derivada de Riemann-Liouville de ordem α de $f(x)=c$ em que $\alpha\in\mathbb{R}_+$ e $c\in\mathbb{R}$.*

Da definição de derivada de Riemann-Liouville temos

$$\begin{aligned}(D^{\alpha}_{0+}c) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1}\cdot c\; dt\\ &= \frac{c}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1}dt.\end{aligned}$$

Substituindo $u=x-t$ tem-se $du=-dt$. Se $t=0\Rightarrow u=x$ e se $t=x\Rightarrow u=0$, assim

$$\begin{aligned}(D^{\alpha}_{0+}c) &= -\frac{c}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\int_x^0 u^{n-\alpha-1}du\\ &= -\frac{c}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left(\left.\frac{u^{n-\alpha}}{n-\alpha}\right|_x^0\right)\\ &= -\frac{c}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left(0-\frac{x^{n-\alpha}}{n-\alpha}\right)\\ &= -\frac{c}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{1}{(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-\alpha}\right).\end{aligned}$$

Calculando a derivada de ordem n, obtemos

$$\begin{aligned}(D_{0+}^{\alpha}c) &= -\frac{c}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{1}{(n-\alpha)}\left(\frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{\Gamma(n-\alpha-n+1)}x^{n-\alpha-n}\right)\\ &= \frac{cx^{-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)}\frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{\Gamma(1-\alpha)}\\ &= \frac{cx^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\end{aligned}$$

Logo, a derivada fracionária de Riemann-Liouville de uma função constante não é igual a zero. No próximo exemplo veremos que isto não ocorre com a derivada fracionária de Caputo.

Exemplo 1.2 *Determine a derivada de Caputo de ordem α de $f(x) = c$, em que $\alpha \in \mathbb{R}_+$ e $c \in \mathbb{R}$.*

Sabemos que

$$\begin{aligned}\left({}^{C}D_{0+}^{\alpha}c\right) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1}\left(\frac{d^n}{dt^n}c\right)dt\\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1}\cdot 0dt\\ &= 0.\end{aligned}$$

Assim, a derivada de Caputo de ordem α de uma função constante é zero.

A seguir, iremos falar sobre espaçoes métricos e grau topológico.

Capítulo 2

Teoria dos Espaços Métricos e Grau Topológico

Neste capítulo, introduziremos diversos resultados preliminares utilizados no desenvolvimento deste trabalho de conclusão de curso, enunciaremos algumas definições e resultados importantes da Teoria dos Espaços Métricos assim como algumas noções de Grau Tpológico, que serão utilizados no decorrer de nossa pesquisa.

2.1 Espaços Métricos

Definição 2.1 *Seja X um conjunto não-vazio. Dizemos que uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ é uma métrica em X se d satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \forall x, y \in X.$

(ii) $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$ (Não negatividade).

(iii) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$ (Simetria).

(iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in X$ (Desigualdade Triangular).

Dizemos, então, que o par (X, d) é um espaço métrico, onde X é um conjunto e d uma métrica em M. O número real $d(x, y)$ é chamado a distância de x a y.

Exemplo 2.1 *Um exemplo muito importante é o conjunto* $\mathbb{R}$ *dos números reais com a métrica* $d(x,y) = |x-y|$. *Relembremos o valor absoluto de um número real:*

$$|x| = \begin{cases} x, & se \quad x \geq 0 \\ -x, & se \quad x < 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Observe que $x \leq |x|$ *e* $-x \leq |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$. *Vamos verificar as propriedades de métrica:*

(i) $|x-y| = 0 \Leftrightarrow x = y$. *Logo,* $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, *assim a primeira propriedade está verificada.*

(ii) Como, por definição de módulo, $|x-y| \geq 0$, *segue que* $d(x,y) \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$ *e com isso verificamos a propriedade da não negatividade.*

(iii) Temos que

$$\begin{aligned} d(x,y) &= |x-y| \\ &= |-(y-x)| \\ &= |y-x| \\ &= d(y,x). \end{aligned}$$

Assim, $d(x,y) = d(y,x)$ *e com isso verificamos a simetria.*

(iv) Para quaisquer x, y *e* $z \in \mathbb{R}$, *tem-se*

$$\begin{aligned} d(x,z) &= |x-z| \\ &= |x+y-y-z| \\ &= |(x-y)+(y-z)| \\ &\leq |x-y| + |y-z| \\ &= d(x,y) + d(y,z) \end{aligned}$$

e assim verificamos a desigualdade triangular.

Portanto, $(\mathbb{R}, d)$ *é um espaço métrico. Nós nos referimos a* d *como a métrica valor absoluto.*

2.2 Topologia dos espaços métricos

Definição 2.2 *Seja X um espaço métrico. Sejam $x \in X$ e $r \in \mathbb{R}$, com $r > 0$. O conjunto*

$$B_r(x) = \{p \in X : d(p, x) < r\},$$

é chamado de bola aberta em X, de raio r e centro x

Definição 2.3 *Seja X um espaço métrico. Sejam $x \in X$ e $r \in \mathbb{R}$, com $r > 0$. O conjunto*

$$B_r[x] = \{p \in X : d(p, x) \leq r\},$$

é chamado de bola fechada em X, de raio r e centro x.

Definição 2.4 *Seja X um espaço métrico. Sejam $x \in X$ e $r \in \mathbb{R}$, com $r > 0$. O conjunto*

$$S_r(x) = \{p \in X : d(p, x) = r\},$$

é chamado de esfera em X, de raio r e centro x.

Definição 2.5 *Seja X um espaço métrico. Dado um subconjunto $A \subset X$, um ponto $p \in A$ é dito um ponto interior de A se, para algum $\epsilon > 0$ existe uma bola aberta $B_\epsilon(p) \in A$*

Definição 2.6 *Dado um subconjunto A de um espaço métrico X. Chamamos de fronteira de A em X, denotada por ∂A, o conjunto formado pelos pontos $a \in X$, tal que, para cada $\epsilon > 0, B_\epsilon(a)$ contém pelo menos um ponto de A e um ponto em $X \backslash A$.*

$$\textit{Em outras palavras, } a \in \partial A \Leftrightarrow \exists\ a | B_\epsilon(a) \cap A \neq \emptyset, \text{ e } B_\epsilon(a) \cap (X - A) \neq \emptyset.$$

Definição 2.7 *Seja A um subconjunto de um espaço métrico X. O conjunto formado por todos os pontos interiores de A é chamado o interior de A, denotado por $int(A)$.*

Definição 2.8 *Um conjunto A de um espaço métrico X diz-se aberto em X quando todos os seus pontos são interiores, isto é, $intA = A$. Assim, $A \subset X$ é aberto, se e somente se, $A \cap \partial A = \emptyset$.*

O teorema que segue é um resultado clássico que nos garante que as bolas abertas de um espaço métrico são conjuntos abertos.

Teorema 2.1 *Em qualquer espaço métrico (X, d), uma bola aberta $B_\epsilon(a)$ é um conjunto aberto.*

Demonstração: Seja $x \in B_r(a)$ e $s = r - d(x, a) > 0$.

Afirmamos que $B_s(x) \subset B_r(a)$.

De fato, basta mostrar que dado $y \in B_s(x)$ temos que $y \in B_r(a)$. Como $y \in B_s(x) \Rightarrow d(x, y) < s$, então:

$$d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + s = r.$$

Daí, $d(a, y) < r$. Portanto, $y \in B_r(a)$. ■

2.3 Conjuntos Fechados

Definição 2.9 *Seja X um espaço métrico. Dado um subconjunto $A \subset X$, um ponto $a \in A$ é dito um ponto de acumulação de A se, para cada $\epsilon > 0$,*

$$B_\epsilon(a) \cap A \backslash \{a\} \neq \emptyset.$$

Definição 2.10 *Dado um subconjunto A de um espaço métrico X. Chamamos de pontos isolados de A, os pontos que não são pontos de acumulação.*

Definição 2.11 *Dado um subconjunto A de um espaço métrico X. Chamamos de ponto aderente à A um ponto $p \in X$ se, para cada $\epsilon > 0$*

$$B_\epsilon(p) \cap A \neq \emptyset.$$

Definição 2.12 *Dado uma subconjunto A de uma espaço métrico X. Chamamos de fecho do conjunto A o conjunto dos pontos aderentes à A e o denotamos por $\overline{A}$.*

Definição 2.13 *Seja X um espaço métrico, diz que um conjunto $F \subset X$ é fechado quando seu complementar $X - F$ é aberto em X.*

Definição 2.14 *Sejam X um espaço métrico e A um subconjunto de X. Diz-se que A é denso em X se $\overline{A} = X$, isto é, se para todo elemento $x \in X$ e para todo $\epsilon > 0$, existe $a \in A$ tal que*

$$d(x, a) < \epsilon \quad ou \quad B_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset.$$

Definição 2.15 *Seja (X, d) um espaço métrico e dado subconjunto $A \subset X$. A distância de um ponto $x \in X$ ao conjunto A é definida por*

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}, \quad x \in X.$$

Definição 2.16 *O diâmetro de um subconjunto $E \subset (X, d)$, onde (X, d) é um espaço métrico, é dado por*

$$diam(E) = sup\{d(x, y); x, y \in E\}.$$

Definição 2.17 *Se (X, d) é um espaço métrico, dizemos que $E \subset X$ é totalmente limitado se, para cada $\epsilon > 0$, E pode ser coberto por um número finito de bolas de raio ϵ, isto é, existem $a_1, a_2, ..., a_n \in E$ tais que $E \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_\epsilon(a_i)$.*

2.4 Compacidade e conjuntos conexos

Definição 2.18 *Dado $A \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que A é um conjunto limitado quando existe $k > 0$ tal que $\|x\| \leq k$, para todo $x \in A$.*

Definição 2.19 *Seja X um subconjunto de um espaço métrico M. Uma cobertura de X é uma família $\mathfrak{C} = (\mathcal{C}_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de M tal que*

$$X \subset \bigcup_{\lambda \in L} \mathcal{C}$$

A cobertura $\mathfrak{C}$ é dita aberta quando cada conjunto $\mathcal{C}_\lambda$, $\lambda \in L$, é aberto em M.

A cobertura $\mathfrak{C}$ diz-se finita quando L é um conjunto finito, ou seja, $\mathfrak{C}$ tem um conjunto finito de elementos.

Se existe um subconjunto $L' \subset L$ tal que

$$X \subset \bigcup_{\lambda \in L'} \mathcal{C}$$

e $\mathfrak{C}' \subset \mathfrak{C}$, onde $\mathfrak{C}' = (\mathcal{C}_\lambda)_{\lambda \in L'}$, então a subfamília $\mathfrak{C}'$ é relativamente a $\mathfrak{C}$ uma subcobertura de X.

Definição 2.20 *Um subconjunto $X \subset M$ de um espaço métrico M é dito compacto quando toda cobertura aberta de X possui uma subcobertura finita.*

Definição 2.21 *Uma cisão de um espaço métrico M é uma decomposição $M = A \cup B$, de M como reunião de dois subconjuntos abertos disjuntos A e B. As condições $M = A \cup B$ e $A \cap B = \emptyset$ equivalem a dizer que $A = M - B$ e $B = M - A$. Por conseguinte, numa cisão $M = A \cup B$, os conjuntos A, B são abertos e fechados em M.*

Definição 2.22 *A cisão $M = A \cup B$ diz-se trivial quando um dos abertos, A ou B, é vazio (e portanto o outro é igual a M). Assim, a cisão trivial é $M = M \cup \emptyset$.*

Definição 2.23 *Um espaço métrico M chama-se conexo quando a única cisão possível em M é a trivial. Um subconjunto X de um espaço métrico M diz-se um conjunto conexo quando o subespaço $X \subset M$ é conexo. Quando X admite uma cisão não-trivial, dizemos que X é desconexo.*

2.5 Aplicações Contínuas

Nesta seção enuciaremos algumas definições e conceitos que nos serão de grande utilidade nos resultados que apareceram no capítulo 3.

Definição 2.24 *Sejam X e Y espaços métricos e $f : M \to N$ uma aplicação. Dizemos que f é uma aplicação contínua em $a \in X$, quando para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(a, \epsilon) > 0$ tal que $d(a, x) < \delta \Rightarrow d(f(a), f(x)) < \epsilon$ que é equivalente a $x \in B_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in B_\epsilon(f(a))$*

Definição 2.25 *Sejam X e Y espaços métricos. Um homeomorfismo de X sobre Y é uma bijeção contínua $f : X \to Y$ cuja inversa $f^{-1} : Y \to X$ também é contínua. Neste caso, diz-se que X e Y são homeomorfos.*

Definição 2.26 *Seja (X, d) um espaço métrico é uma função $f : X \to X$. Dizemos que f é Lipschitziana se existir uma constante $M > 0$ tal que*
$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$. A constante $M > 0$ é chamada constante de Lipschitz.

Exemplo 2.2 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ tal que $f(x) = |x|$, vamos mostrar que f é Lipschitziana.*

Temos que

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \big||x| - |y|\big| \\ &\leq |x - y|. \end{aligned}$$

Assim encontramos $M = 1 > 0$ *tal que* $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ *logo* f *é Lipschitziana.*

2.6 Sequências, subsequências e sequências cauchy

Definição 2.27 *Uma sequência de números reais é uma função* $x : N \to \mathbb{R}$*, que associa a cada número natural* n *um número real* x_n *em vez de* $x(n)$*.*

Definição 2.28 *Dizemos que* $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *é uma subsequência de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *se existe uma subsequência* $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ *estritamente crescente tal que* $y_k = x_{n_k}, \forall k \in N$*.*

Definição 2.29 *Uma sequência é dita convergente se existe* $x \in \mathbb{R}$ *de modo que*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq N \Rightarrow |x_n - x| < \epsilon.$$

Definição 2.30 *Uma sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *em um espaço métrico* X *é dita ser limitada se o conjunto de seus* x_n *for um subconjunto limitado em* X*.*

Definição 2.31 *Seja* (X, d) *um espaço métrico. Uma sequência* x_k *é dita uma sequência de Cauchy quando, para todo* $\epsilon > 0$*, existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$d(x_m, x_n) < \epsilon, \forall m, n \geq N.$$

De modo mais intuitivo, podemos dizer que as sequências de Cauchy são sequências em que os termos tendem a se aproximarem, para índices sucientemente grandes.

Definição 2.32 *Um espaço métrico* (X, d) *é dito um espaço métrico completo, ou simplesmente espaço completo quando todas as sequências de Cauchy convergem para um ponto de* X*.*

2.7 Espaços normados e espaços de Banach

Definição 2.33 *Seja V um espaço vetorial real e $\mathbb{R}$ o corpo dos escalares. Uma função $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^+$ é uma norma em V se, para quaisquer $x, y \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, as seguintes condições são cumpridas:*

N_1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ e $\|x\| > 0$ se $x \neq 0$ (comprimento positivo);

N_2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ (dilatação);

N_3. $\| x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$; (desigualdade triângular).

Definição 2.34 *Um espaço vetorial normado, ou simplesmente espaço normado, é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, munido de uma norma, $(V, \|\cdot\|)$*

Definição 2.35 *Denomina-se Espaço de Banach um espaço normado completo.*

2.7.1 Contrações

Definição 2.36 *Seja (X, d) um espaço métrico completo. Uma aplicação $T : X \to X$ é chamada uma contração em X se existir uma constante $0 < k < 1$ tal que*

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

Definição 2.37 *O ponto fixo de uma aplicação $T : X \to X$ é um elemento $x \in X$ tal que*

$$T(x) = x.$$

O teorema que segue é um resultado clássico de análise e é uma ferramenta essencial aplicado em vários campos da matemática. Neste trabalho, a importância do mesmo se dará na prova do Teorema 3.1.

Teorema 2.2 ***(Teorema do Ponto Fixo de Banach)*** *Se X é um espaço métrico completo e $T : X \to X$ é uma contração, então existe um único $x \in X$ tal que $T(x) = x$.*

Demonstração: Contruíremos aqui uma sequência $(x_n) \subset X$ e mostraremos que ela é de Cauchy, de modo que convirja em X. Depois, provaremos que o limite de (x_n) é ponto fixo de T e que T não possui outros pontos fixos.

Tome $x_0 \in X$ arbitrário e defina uma sequência iterada (x_n) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
x_1 &= T(x_0) \\
x_2 &= T(x_1) = T^2(x_0) \\
&\vdots \\
x_n &= T(x_{n-1}) = T^n(x_0) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
d(x_{n+1}, x_n) &= d\left(T(x_n), T(x_{n-1})\right) \\
&\leq kd(x_n, x_{n-1}) \\
&\leq kd\left(T(x_{n-1}), T(x_{n-2})\right) \\
&\leq k^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\
&\vdots \\
&\leq k^n d(x_1, x_0).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Assim, usando a desigualdade triangular, a soma de uma progressão geométrica e (2.2), para $n > m$, obtemos

$$\begin{aligned}
d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) \\
&\leq k^m d(x_1, x_0) + k^{m+1} d(x_1, x_0) + \cdots + k^{n-1} d(x_1, x_0) \\
&= (k^m + k^{m+1} + \cdots k^{n-1}) d(x_1, x_0) \\
&= k^m (1 + k + \cdots + k^{n-1-m}) d(x_1, x_0) \\
&\leq k^m \frac{1}{1-k} d(x_1, x_0).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Agora, como $0 < k < 1$, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $m > n_0$ temos

$$\frac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0) < \epsilon. \tag{2.4}$$

Portanto, se $n > m > n_0$, então de (2.3) e (2.4), segue que

$$d(x_m, x_n) < \epsilon.$$

Ou seja, (x_n) é uma sequência de Cauchy. E, como X é completo concluímos que (x_n) converge, isto é, $x_n \to x$, com $x \in X$.

Afirmação 2.1 *x é um ponto fixo da aplicação T.*

De fato, da desigualdade triangular e da definição de contração temos:

$$\begin{aligned} 0 \leq d(x, T(x)) &\leq d(x, x_m) + d(x_m, T(x)) \\ &\leq d(x, x_m) + d(T(x_{m-1}), T(x)) \\ &\leq d(x, x_m) + kd(x_{m-1}, x). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Como $x_m \to x$, fazendo $m \to \infty$ temos $d(x, x_m) + kd(x_{m-1}, x) \to 0$ e portanto, de (2.5), obtemos

$$d(x, T(x)) = 0.$$

Isto é, $T(x) = x$, portanto x é ponto fixo de T.

Afirmação 2.2 *x é o único ponto fixo da aplicação.*

De fato, suponha, que y tambem é ponto fixo de T, isto é, $T(y) = y$. Desde que T é uma contração temos

$$d(x, y) = d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y)$$

daí,

$$(x, y) - kd(x, y) \leq 0$$

o que implica em,

$$(1 - k)d(x, y) \leq 0$$

mas $(1 - k) > 0$ pois 0<k<1, logo

$$0 \leq d(x, y) \leq 0$$

ou ainda

$$d(x, y) = 0$$

e, portanto $x = y$, onde concluímos que o ponto fixo de T é único. ■

2.8 Operadores Compactos

Apresentaremos nesta seção a definição operador compacto, definição essa que aparecerá com bastante frequência nos próximos teoremas abordados.

Definição 2.38 *Um subconjunto X de um espaço métrico M chama-se relativamente compacto quando seu fecho $\overline{X}$ é compacto. Isto significa que toda sequência de pontos $x_n \in X$ possui uma subsequência convergente em M (podendo ocorrer que o limite dessa subsequência não pertença a X).*

Definição 2.39 *Sejam E, F espaços vetoriais normados. Dizemos que um operador linear $T : E \to F$ é completamente contínuo se T leva sequências fracamente convergentes em E em sequências convergentes em F.*

Definição 2.40 *Sejam E, F espaços vetoriais normados. Dizemos que um operador linear $T : E \to F$ é compacto se T leva conjuntos limitados em E em conjuntos relativamente compactos em F.*

Lema 2.1 *Seja M um subconjunto compacto de um espaço normado V e $\epsilon > 0$, existe um subconjunto finito E de M e uma transformação contínua P de M em E tal que*

$$\|P(x) - x\| \leq \epsilon, \quad \forall x \in M.$$

Demonstração: ver [19]

2.9 Equicontinuidade

Nesta seção apresentaremos o conceito de equicontinuidade que é de grande utilidade no estudo de funções contínuas, ademais enuciaremos algumas outras definições e a partir delas, demonstrar o teorema de Arzelá-Ascoli.

Definição 2.41 *Sejam M, N espaços métricos e E um conjunto de aplicações $f : M \to N$. O conjunto E diz-se eqüicontínuo no ponto $a \in M$ quando, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta$ em M implique $d(f(x), f(a)) < \epsilon$, seja qual for $f \in E$.*

Definição 2.42 *Um conjunto E de aplicações $f : M \to N$ diz-se uniformemente eqüicontínuo quando, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que $d(x, y) < \delta$ em $M \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon$ para toda $f \in E$.*

Definição 2.43 *Uma família $\mathscr{F}$ de funções é dita uniformemente limitada se existe $K > 0$ tal que*

$$|f(x)| \leq K, \ \forall x \in X$$

Teorema 2.3 ***(Arzelá-Ascoli)****. Se (X, d) é um espaço métrico compacto, um subconjunto $\mathscr{F}$ de $C(X, \mathbb{R})$ é relativamnete compacto se, e somente se, é uniformemente limitado e equicotínuo.*

Demonstrção: $(\Rightarrow)$ Suponha que $\mathscr{F}$ é relativamnete compacto, isto implica que o fecho $\overline{\mathscr{F}}$ é compacto e, por sua vez, é totalmente limitado. Como, $\mathscr{F} \subset \overline{\mathscr{F}}$ temos que $\mathscr{F}$ é totalmente limitado, logo, dado $\epsilon > 0$ existem $f_1, f_2, ..., f_n \in C(X, \mathbb{R})$ tais que

$$\mathscr{F} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{\frac{\epsilon}{3}}(f_i).$$

Seja $f \in \mathscr{F}$, arbitrário. Assim, $f \in B_{\frac{\epsilon}{3}}(f_{i_0})$ para algum $i_0 \in \{1, 2, ..., n\}$, assim, para $x \in X$

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - f_{i_0}(x) + f_{i_0}(x)| \leq |f(x) - f_{i_0}(x)| + |f_{i_0}(x)| \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + M_{i_0} \leq \frac{\epsilon}{3} + \max_{1 \leq i \leq n} M_i \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + M = \widetilde{M}, \end{aligned}$$

onde $M_i = \max |f_i(x)|$ e $M = \max\limits_{1 \leq i \leq n} M_i$.

Portanto $|f(x)| \leq \widetilde{M}$, para todo $x \in X$ e para todo $f \in \mathscr{F}$ e, consequentemente, $\mathscr{F}$ é uniformemente limitado.

Vamos agora mostrar, que $\mathscr{F}$ é equicontínua. Sejam $f \in \mathscr{F}$ e, $x, x' \in X$ arbitrários. Note que

$$|f(x) - f(x')| \leq |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(x')| + |f_i(x') - f(x')|$$

para cada $i = 1, 2, ..., n$. Escolha $j \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $f \in B_{\frac{\epsilon}{3}}(f_j)$, ou seja,

$$\sup_{x \in X} |f(x) - f_j(x)| < \frac{\epsilon}{3},$$

logo

$$\begin{aligned} |f(x)-f(x')| &\leq |f(x)-f_j(x)|+|f_j(x)-f_j(x')|+|f_j(x')-f(x')| \\ &\leq \frac{2\epsilon}{3}+|f_j(x)-f_j(x')|. \end{aligned}$$

Como X é compacto, temos que $f_1, f_2, ..., f_n$ são uniformemente contínuas, em particular, dado $\epsilon > 0$ tal que

$$d(x,x') < \delta \Rightarrow |f_j(x)-f_j(x')| < \frac{\epsilon}{3},$$

onde segue que,

$$d(x,x') < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x')| < \epsilon$$

Como $f \in \mathscr{F}$ é qualquer, segue que $\mathscr{F}$ é equicontínuo.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponha que $\mathscr{F}$ é uniformemente limitado e equicontínuo, e assim, queremos mostrar que o fecho $\overline{\mathscr{F}}$ de $\mathscr{F}$ é compacto, ou seja, que $\overline{\mathscr{F}}$ é completo e totalmente limitado. Agora, recorde que o $\overline{\mathscr{F}}$ é fechado e está contido no espaço completo das funções contínuas $C(X,\mathbb{R})$, logo $\overline{\mathscr{F}}$ é completo, portanto resta-nos provar que $\overline{\mathscr{F}}$ é totalmente limitado.

Observe que se $\mathscr{F}$ é totalmente limitado então $\overline{\mathscr{F}}$ é totalmente limitado. Logo, dado $\epsilon > 0$ devemos mostrar que existe $\{f_1, ..., f_n\} \subset \mathscr{F}$ tal que

$$\mathscr{F} \subset \bigcup_{1 \leq i \leq n} B_\epsilon(f_i).$$

Por hipótese, temos o seguinte:

1. (Limitação uniforme) existe $M \geq 0 : |f(x)| \leq M, \quad \forall x \in X, \quad \forall f \in \mathscr{F}$;

2. (Equicontinuidade) existe $\delta > 0 : d(x,y) < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \frac{\epsilon}{4}, \quad \forall x, y \in X, \forall f \in \mathscr{F}$;

3. (Compacidade de X) existem $x_1, x_2, ..., x_n \in X : X \subset \bigcup_{i=1}^n B_\delta(x_i)$.

Agora, escolha um inteiro positivo m e divida o intervalo $[-M, M]$ em $k = 2Mm$ intervalos de comprimento $\frac{1}{m}$ de tal modo que $\frac{1}{m} < \frac{\epsilon}{4}$. Sejam $y_1, y_2, ..., y_k$ os respectivos centros de cada um dos subintervalos de $[-M, M]$.

Escreva $E = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset X, F = \{y_1, y_2, ..., y_k\} \subset \mathbb{R}$ e seja

$$L = \{\alpha : E \to F; \alpha \text{ é uma função}\}$$

uma família, claramente finita, constituída por todas as possíveis funções $\alpha : E \to F$.

Para ca $\alpha \in L$ considere uma família $\mathscr{F}_\alpha \subset \mathscr{F}$, tal que

$$\mathscr{F}_\alpha := \{f \in \mathscr{F}; |f(x_i) - \alpha(x_i)| < \frac{\epsilon}{4},\ 1 \leq i \leq n\} \tag{2.6}$$

onde $\alpha(x_i)$ é igual a algum y_j, $1 \leq j \leq k$, e $f(x_i)$ pertence a algum subintervalo de $[-M, M]$.

Considere a família $\{\mathscr{F}_\alpha\}_{\alpha \in L}$ então, podemos observar que

$$\mathscr{F} \subset \bigcup_{\alpha \in L} \mathscr{F}_\alpha. \tag{2.7}$$

Além disso, de (2.6) temos

$$\bigcup_{\alpha \in L} \mathscr{F}_\alpha \subset \bigcup_{f \in \mathscr{F}_\alpha} B_\epsilon(f) \tag{2.8}$$

De fato $f, g \in \mathscr{F}_\alpha$ e $x \in X$ tem-se que, $x \in B_\delta(x_i)$ para algum $i \in \{1, 2, ..., n\}$, então

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &\leq \overbrace{|f(x) - f(x_i)|}^{\text{por } 2} + \overbrace{|f(x_i) - \alpha(x_i)|}^{2.6} + \overbrace{|\alpha(x_i) - g(x_i)|}^{2.6} + \overbrace{|g(x_i) - g(x)|}^{\text{por } 2} \\ &\leq \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon \end{aligned}$$

logo,

$$\sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \leq \epsilon$$

o que implica,

$$\text{diam } \mathscr{F}_\alpha \leq \epsilon$$

onde segue que

$$\mathscr{F} \subset B_\epsilon(f).$$

Portanto, de (2.7) e (2.8).

$$\mathscr{F} \subset \bigcup_{f \in \mathscr{F}_\alpha} B_\epsilon(f).$$

■

2.10 O grau Topológico de Brouwer

Nesta seção introduziremos algumas noções sobre grau Topológico de Brouwer para um estudo mais detalhado consulte [2, 15].

Definição 2.44 *Sejam U e V abertos do $\mathbb{R}^n$ e $f : U \to V$ uma bijeção. Dizemos que f é um difeomorfismo se f é uma bijeção diferenciável cuja inversa f^{-1} é também diferenciável. Dizemos que f é um difeomorfismo de classe C^1 se f e f^{-1} são de classe C^1.*

Teorema 2.4 ***(Teorema da Aplicação Inversa)*** *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ e $f : U \subset \mathbb{R}^m$ uma aplicação de classe C^1. Se, para $a \in U, J_f(a) \neq 0$, então existem abertos V e W, contendo a e $f(a)$, respectivamente, tais que f é um difeomorfismo de classe C^1 entre V e W. Além disso, para $y \in W$ temos*

$$(f^{-1})'(y) = [f'(f^{-1}(y))]^{-1}.$$

Demonstração: ver [20]

Teorema 2.5 ***(Teorema de Aproximação de Weierstrass)*** *Dada uma função contínua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, existe uma sequência de polinômios p_n tais que $\lim_{n\to\infty} p_n = f$ uniformemente em $[a,b]$.*

Demonstração: Ver [11]

Definição 2.45 *Sejam $f : A \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua, $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado, e $y \in \mathbb{R}^n \backslash \partial A$. O grau topológico é uma função* deg *que associa cada tripla (f, A, y) a um número inteiro e que satisfaz:*

(d_1) $\deg(I_d, A, y) = 1, \ \forall y \in A.$

(d_2) $\deg(f, A, y) = \deg(f, A_1, y) + \deg(f, A_2, y)$, *para quaisquer dois abertos disjuntos $A_1, A_2 \subset A$ tais que $y \notin f(\overline{A} \backslash (A_1 \cup A_2))$.*

(d_3) *(Invariância por homotopia) $(H(t,), A, y(t))$ independe do valor de $t \in [0,1]$ sempre que $H : [0,1] \times A \to \mathbb{R}^n$ e $y : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ forem contínuas e $y(t) \notin H(t, \partial A), \ \forall t \in [0,1]$.*

Definição 2.46 *Dados $A \in \mathbb{R}^n$ aberto, $f : A \to \mathbb{R}$ função de classe $C^1(A)$, sabemos que a derivada de f em $x \in A$ é dada pela jacobiana em x, que denotaremos por $J_f(x)$. Pontos regulares são definidos como pontos $x \in A$ tais que $J_f(x) \neq 0$ Caso contrário, x é dito ponto crítico. Se $f(x) = y$ para algum ponto crítico x, então y é dito valor singular. Caso contrário, se y não é imagem de qualquer ponto crítico via f, então y é chamado de valor regular. Denotaremos por S_f o conjunto dos pontos de críticos da função f.*

Proposição 2.1 *Sejam $A \in \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, $f \in C^\infty(A)$ e $y \notin f(\partial A)$. Se y é um valor regular de f, então $f^{-1}(y)$ é um conjunto finito.*

Demonstração: Primeiro mostraremos que os pontos $f^{-1}(y)$ são isolados. De fato pois, como y é um valor regular de f, temos que $J_f\ (x_0) \neq 0$, portanto, pelo Teorema da Aplicação Inversa, existe $U = B_\epsilon(x_0)$ tal que $f|_U$ é um difeomorfismo. Logo, para cada $x_0 \in f^{-1}(y)$, podemos tomar $U = B_\epsilon(x_0)$ tal que $f^{-1}\ (y) \cap B_\epsilon(x_0) = x_0$. Concluindo que todos os elementos de $f^{-1}(y)$ são isolados.

Afirmação: $f^{-1}(y)$ é um conjunto finito.

Suponha que $f^{-1}(y)$ seja um conjunto com infinitos elementos. Logo, existe uma sequência de pontos distintos $(x_n) \subset A$ em $f^{-1}(y)$, e portanto,

$$(x_n) \subset A \subset \overline{A}.$$

Como A é limitado, segue que $\overline{A}$ é compacto, logo existe uma subsequência $(x_{n_j}) \subset (x_n)$ tal que

$$x_{n_j} \to x_0 \in A.$$

Como f é contínua e a sequência (x_n) é de pontos isolados, segue que

$$y = f(x_{n_j}) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0) = y.$$

Isso significa que $x_0 \in \overline{A} \cap f^{-1}(y)$, e como $y \notin f(\partial A)$, então $y \in f(A)$. Mas como x_0 pertence ao conjunto de pontos isolados $f^{-1}(y)$, temos uma contradição, pois chegamos que x_0 é o limite de uma sequencia de elementos de A. Portanto, $f^{-1}(y)$ é finito. ■

Definição 2.47 *(O caso regular - y valor regular). Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, $f \in \overline{C}^1(A)$ e $y \notin f(\partial A \cup S_f)$. Então definimos o grau topològico de Brouwer da aplicação f em relação a A no ponto y como sendo :*

$$\deg_B(f,A,y) = \begin{cases} \sum\limits_{x \in f^{-1}} sgn J_f\,(x)\,, & se \quad f^{-1}\,(y) \neq \emptyset \\ 0, & se \quad f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases} \tag{2.9}$$

onde sgn é a função definida por

$$sgn(t) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad t > 0 \\ -1, & \text{se} \quad t < 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

Denotaremos aqui o grau topológico de Brouwer por $\deg_B$.

Exemplo 2.3 *Seja $f : A \to \mathbb{R}$ uma aplicação definida por $f(x) = sen\,(x)$ com $A = \left(0, \dfrac{5\pi}{2}\right)$ e $y = \dfrac{\pi}{4}$. Vamos calcular o grau topológico de Brouwer de f com relação a A no ponto y, ou seja,* $\deg_B(f,A,y)$.

Afirmação 2.3 $\deg_B\left(f, \left(0, \frac{5\pi}{2}\right), \frac{\pi}{4}\right)$ *está bem definido.*

De fato pois

$$\partial A = \left\{0, \frac{5\pi}{2}\right\} \Rightarrow f(\partial A) = \{0,1\}$$

e

$$f(S_f) = \left\{x \in \left(0, \frac{5\pi}{2}\right); \cos\,(x) = 0\right\} = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\} \Rightarrow f(S_f) = \{-1,1\},$$

portanto $f(\partial A \cup S_f) = \{-1,0,1\}$. Assim concluìmos que $\dfrac{\pi}{4} \notin \{-1,0,1\}$. Observamos ainda que

$$f^{-1}\left\{\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\} = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3\},$$

e pela definição de grau topológico temos que

$$\deg_B\left(f, \left(0, \frac{5\pi}{2}\right), \frac{\pi}{4}\right) = \sum_{\eta \in f^{-1}\left(\left\{\frac{\pi}{4}\right\}\right)} sgn(J_f(\eta_i)).$$

Logo

$$\deg_B\left(f, \left(0, \frac{5\pi}{2}\right), \frac{\pi}{4}\right) = sgn(f'(\eta_1)) + sgn(f'(\eta_2)) + sgn(f'(\eta_3)).$$

Portanto

$$\deg_B\left(f, \left(0, \frac{5\pi}{2}\right), \frac{\pi}{4}\right) = 1 + (-1) + 1 = 1.$$

Definição 2.48 *Seja* $f \in C^2(\overline{A}, \mathbb{R}^n), y \notin f(\partial A)$ *e* $y \in f(S)$. *Considere* C_y *a componente conexa de* $\mathbb{R}^n \backslash f(\partial A)$, *que contém* y. *Sendo* C_y *um aberto, existe* $x \in C_y \backslash f(S)$. *Definimos no que segue-se*

$$\deg_B(f, A, y) = \deg_B(f, A, x), \ \forall x \in C_y \backslash f(S).$$

Definição 2.49 *Seja* $A \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto aberto e limitado. Se* $\phi \in C(\overline{A}, \mathbb{R}^n)$ *e* $y \in \mathbb{R}^n \backslash \phi(\partial A)$, *então* (ϕ, A, y) *é uma tripla admissível para o grau topológico de Brouwer.*

2.10.1 Propriedades do Grau Topológico de Brouwer

Agora enunciaremos algumas das propriedades válidas do Grau Topológico de Brouwer, onde demonstraremos apenas as propriedades P_8 e P_9, propriedades essas que serão ùteis na demonstração do Teorema 3.4, para as demais demonstrações consulte [2].

Proposição 2.2 *As seguintes propriedades são válidas:*

(P_1) - (Normalização) Sejam $I_d : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a função identidade e A um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$. Então,

$$\deg_B(I_d, A, y) = 1, \ \forall y \in A.$$

(P_2) - (Translação) Seja (f, A, y) uma tripla admissível. Então,

$$\deg_B(f, A, y) = \deg_B(f - y, A, 0).$$

(P_3) - (Aditividade) Seja (f, A, y) uma tripla admissível. Se $A_1, A_2 \subset A$ são abertos e disjuntos com $y \notin f(A \backslash (A_1 \cup A_2))$, então

$$\deg_B(f, A, y) = \deg_B(f, A_1, y) + \deg_B(f, A_2, y).$$

(P_4) - (Excisão) Seja (f, A, y) uma tripla admissível e considere um conjunto compacto $K \subset A$ tal que $y \notin f(K)$. Então,

$$\deg_B(f, A, y) = \deg_B(f, A \backslash K, y).$$

(P_5) - (Continuidade em relação à função f) Sejam $f \in C(\overline{A}, \mathbb{R}^n)$ e $y \notin f(\partial A)$. Existe uma vizinhança V de f na topologia $C(\overline{A}, \mathbb{R}^n)$, tal que para $\forall g \in V$ temos que:

(i) $y \notin g(\partial A)$;

(ii) $\deg_B(f, A, y) = \deg_B(g, A, y)$.

(P_6) - (Invariância local) Seja (f, A, y) uma tripla admissível. Então, existe uma vizinhança V de y tal que, para todo $z \in V$, $\deg_B(f, A, z)$ está bem definido e

$$\deg_B(f, A, z) = \deg_B(f, A, y).$$

(P_7) - (Propriedade do bordo) Sejam (f, A, y) e (g, A, y) triplas admissíveis. Se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \partial A$. Então

$$\deg_B(f, A, y) = \deg_B(g, A, y).$$

(P_8) - (Existência de solução) Se $\deg_B(f, A, y) \neq 0$ então existe $x_0 \in A$ tal que $f(x_0) = y$

(P_9) - (Invariância Homotópica) Se $H \in C([0,1] \times A, \mathbb{R}^n), y \notin H([0,1] \times A)$ e y é um valor regular de $H(t,.) \in C^1(\overline{A}, \mathbb{R}^n)$ para todo $t \in [0,1]$. Então

$$\deg_B(H(t,.), A, y) = k, \ \forall t \in [0,1], \text{ onde } k \text{ é uma constante.}$$

Demonstração: (P_8) - Sejam $f \in C(\overline{A}, \mathbb{R}^n)$ e $y \notin f(\partial A)$, e $r = d\,(y, f(\partial A)) > 0$. Como $C^2(\overline{A}, \mathbb{R}^n)$ é denso em $C(\overline{A}, \mathbb{R}^n)$ pelo Teorema de Aproximação de Weierstrass existe $g \in C^2(\overline{A}, \mathbb{R}^n)$, com $\|g - f\|_\infty < \dfrac{r}{2}$, tal que

$$\deg_B(f, A, y) = \deg_B(g, A, y)$$

onde $\|g - f\|_\infty = \sup\limits_{x \in \overline{A}} |g(x) - f(x)|$.
Escolhendo y_1 suficientemente próximo de y com $y_1 \in C_y \backslash g(S)$, temos

$$\deg_B(g, A, y) = \deg_B(g, A, y_1).$$

Sendo $\deg_B(f, A, y) \neq 0$, por hipótese, temos que $\deg_B(g, A, y_1) \neq 0$, implicando que existe $x_0 \in A$ tal que $g(x_0) = y_1$.

Afirmação 2.4 $y \in f(A)$.

De fato, caso contrário

$$y \notin f(\overline{A}) \text{ com } d\left(y, f(\overline{A})\right) > 0.$$

Fixe $\delta > 0$ e considere o seguinte conjunto $\left(f(\overline{A})\right)_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n; d\left(x, f(\overline{A})\right) < \delta\}$ que é uma delta vizinhança de $f(\overline{A})$, onde

$$0 < \delta < \frac{1}{2} d\left(y, \partial(f(\overline{A}))\right).$$

Fixado g de maneira que $\|g - f\|_\infty < \delta$ temos que $g(\overline{A}) \subset \left(f(\overline{A})\right)_\delta$. De fato,

$$|g(x) - f(x)| \leq \|g - f\|_\infty < \epsilon < \delta, \text{ onde } 0 < \epsilon < \frac{r}{2}.$$

Assim

$$d(g(x), f(\overline{A})) < \epsilon < \delta,$$

o que implica

$$g(x) \subset \left(f(\overline{A})\right)_\delta, \forall x \in \overline{A}$$

e consequentemente

$$g(\overline{A}) \subset \left(f(\overline{A})\right)_\delta.$$

Logo $g(\overline{A}) \cap \{y_1\} = \emptyset$, que é um absurdo, pois $y_1 \in g(\overline{A})$. Portanto, $y \in f(A)$ e segue-se que existe $x_0 \in A$ tal que $f(x_0) = y$.

(P_9) - Para $\tau \in [0,1]$ fixado, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$t \in [0,1], |t - \tau| < \delta \Rightarrow \|H(\cdot, t) - H(\cdot, \tau)\|_\infty < \epsilon.$$

Usando a propriedade P_5, temos que a aplicação $t \to \deg_B(H(\cdot, t), A, y)$ é localmente constante. Sendo $[0,1]$ um conjunto compacto e conexo, segue que a função $t \to \deg_B(H(\cdot, t), A, y)$ é constante, isto é

$$\deg_B(H(t, .), A, y) = k, \ \forall t \in [0,1].$$

■

2.11 Grau de Leray-Schauder

Na seção anterior definimos o grau Topológico de Brouwer para dimensão finita, onde bastava ser verificada as proprieades da Definição 2.45. Nesta seção trabalharemos com o grau Topológico em dimensões infinita, para mais detalhes consulte [17].

Antes de definirmos o grau de Leray-Schauder, vamos precisar de alguns resultados e noções preliminares.

Definição 2.50 *Sejam E e F espaços de Banach e $M \subset E$ um conjunto qualquer. Dizemos que a aplicação $T : M \to F$ é completamente contínua se*

(i) T é contínua;

(ii) $\overline{T(A)}$ é um conjunto compacto para todo $A \subset M$ limitado.

Se, além das propriedades (i) e (ii), tivermos $\overline{T(M)}$ compacto, dizemos que T é uma aplicação compacta.

Definição 2.51 *Sejam E um espaço de Banach, $U \subset E$ um conjunto qualquer e $A \subset E$ um conjunto aberto e limitado tal que $\overline{A} \subset U$. Considere uma aplicação completamente contínua $T : U \to E$. Se $f : U \to E$ é definida por $f(x) = x - T(x)$ e $y \in E \backslash f(\partial A)$, então dizemos que (f, A, y) é uma tripla admissível para o grau de Leray-Schauder.*

Definição 2.52 *Sejam E e F espaços de Banach e $M \subset E$ um conjunto qualquer. Dizemos que a aplicação $T : M \to F$ tem dimensão finita se $T(M)$ está contido num subespaço de F de dimensão finita.*

Lema 2.2 *Sejam E e F espaços de Banach. Assuma que $M \subset E$ seja um conjunto limitado e considere uma aplicação compacta $T : M \to F$. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe $T_\epsilon : M \to F$ de dimensão finita tal que $\|T(x) - T_\epsilon(x)\|_F < \epsilon$ para todo $x \in M$, onde $\| \cdot \|_F$ denota a norma em F.*

Demonstração: Ver [17]

Corolário 2.1 *Sejam E um espaço de Banach e $K \subset E$ um conjunto compacto. Para todo $\epsilon > 0$, existe um subespaço de dimensão finita $V_\epsilon \subset E$ e uma função contínua $g_\epsilon : K \to F_\epsilon$ tal que, para todo $x \in K$, $\|x - g_\epsilon(x)\| < \epsilon$.*

Lema 2.3 *Sejam E um espaço de Banach e $A \subset E$ um conjunto aberto e limitado. Considere uma aplicação compacta $T : \overline{A} \to E$ e defina $f : \overline{A} \to E$ por $f(x) = x - T(x)$. Então:*

(i) *f é uma aplicação própria de $\overline{A}$;*

(ii) *f é uma aplicação fechada.*

Demonstração: Ver [17]

Lema 2.4 *Seja (f, A, y) uma tripla admissível. Tome $T_1, T_2 : \overline{A} \to E$ aplicações de dimensões finita tais que, para todo $x \in \overline{A}$,*

$$\|T_1(x) - T(x)\| < d(y, f(\partial U)) \text{ e } \|T_2(x) - T(x)\| < d(y, f(\partial A)),$$

onde $T = I - f$. Considere o seguinte:

- *$S_1 = span\{T_1(\overline{A}) \cup \{y\}\}, S_2 = span\{T_2(\overline{A}) \cup \{y\}\}$ e $S = S_1 + S_2$ (onde span representa o espaço gerado pelo conjunto em questão);*
- *$A_1 = A \cap S_1$ e $A_2 = A \cap S_2$;*
- *$f_1 : \overline{A \cap S} \to S$ e $f_1 : \overline{A \cap S} \to S$ as aplicações definidas por*

$$f_1(x) = x - T_1(x) \text{ e } f_2(x) = x - T_2(x).$$

Então, as triplas $\left(f_1|_{\overline{A}_1}, A_1, y\right)$ e $\left(f_2|_{\overline{A}_2}, A_2, y\right)$ são admissíveis para o grau de Brouwer e

$$\deg_B\left(f_1|_{\overline{A}_1}, A_1, y\right) = \deg_B\left(f_2|_{\overline{A}_2}, A_2, y\right).$$

Demonstração: Ver [17]

Definição 2.53 *Sejam (f, A, y) uma tripla admissível e $\widehat{T} : \overline{A} \to E$ uma aplicação de dimensão finita tal que, para todo $x \in \overline{A}$*

$$\|\widehat{T}(x) - T(x)\| < d(y, f(\partial A)),$$

onde $T = I - f$. Defina $\widehat{f} : A \to E$ por $\widehat{f}(x) = x - \widehat{T}(x)$. Se $S \subset E$ é um espaço vetorial de dimensão finita tal que $y \in S$ e $\widehat{T}(\overline{A}) \subset S$, então definimos o grau de Leray-Schauder de (f, A, y) por

$$\deg_{LS}(f, A, y) = \deg_B \left(\widehat{f}|_{\overline{A \cap S}}, A \cap S, y \right)$$

onde $\deg_{LS}$ denota o grau topológico de Leray-Schauder

Assim como feito para o Grau Topológico de Brouwer, enunciaremos algumas propriedades para o Grau Topológico de Leray-Schauder, onde demonstraremos apenas as propiedades (P_6) e (P_8), as demais propriedades o leitor pode consultar [17].

Proposição 2.3 *As seguintes propriedades são válidas:*

(P_1) - *(Normalização) Sejam E um espaço de Banach, $I : E \to E$ a aplicação identidade e A um subconjunto aberto e limitado de E, então, para todo $y \in A$,*

$$\deg_{LS}(I, A, y) = 1$$

(P_2) - *(Translação) Seja (f, A, y) uma tripla admissível, então $(f - y, A, 0)$ é admissível e*

$$\deg_{LS}(f, A, y) = \deg_{LS}(f - y, A, 0).$$

(P_3) - *(Aditividade) Seja (f, A, y) uma tripla admissível. Se $A_1, A_2 \subset A$ são abertos e disjuntos com $y \notin f(\overline{A} \backslash (A_1 \cup A_2))$, então (f, A_1, y) e (f, A_2, y) são admissíveis e*

$$\deg_{LS}(f, A, y) = \deg_{LS}(f, A_1, y) + \deg_{LS}(f, A_2, y)$$

(P_4) - *(Excisão) Seja (f, A, y) uma terna admissível e considere um conjunto compacto $K \subset \overline{A}$ tal que $y \notin f(K)$. Então, $(f, A \backslash K, y)$ é admissível*

$$\deg_{LS}(f, A, y) = \deg_{LS}(f, A \backslash K, y).$$

(P_5) - *(Continuidade em relação á função T) Seja (f, A, y) uma tripla admissível. Então, sendo $T = I - f$, existe $\epsilon > 0$ tal que, para toda aplicação compacta $P : A \to E$ com*

$$\sup_{x \in \overline{A}} \|P(x) - T(x)\| < \epsilon$$

a tripla $(I - P, A, y)$ é admissível e

$$\deg_{LS}(I - P, A, y) = \deg_{LS}(f, A, y).$$

(P_6) - *(Invariância homotópica) Sejam E um espaço de Banach e $A \subset E$ um conjunto aberto e limitado. Considere $y \in E$ e uma aplicação compacta $F : A \times [0,1] \to E$ tais que $x - F(x,t) \neq y$ para todo $x \in \partial A$ e para todo $t \in [0,1]$. Então,*

$$\deg_{LS}(I - F(\cdot, t), A, y)$$

não depende de t.

(P_7) - *(Invariância local) Seja (f, A, y) uma tripla admissível. Então, existe uma vizinhança V de y tal que, para todo $z \in V$, $\deg_{LS}(f, A, z)$ está definido e*

$$\deg_{LS}(f, A, z) = \deg_{LS}(f, A, y).$$

(P_8) - *(Existência de solução) Seja (f, A, y) uma tripla admissível. Se*

$$\deg_{LS}(f, A, y) \neq 0,$$

então existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

(P_9) - *(Propriedade da fronteira) Sejam (f, A, y) e (g, A, y) duas triplas admissíveis tais que $f|_{\partial A} = g|_{\partial A}$. Então,*

$$\deg_{LS}(f, A, y) = \deg_{LS}(g, A, y).$$

Demonstração: (P_6) - Faça, para todo $t \in [0,1], H(\cdot, t) = I - F(\cdot, t)$ e $r = d(y, H(\partial A \times [0,1]))$. Vamos mostrar que $r > 0$. Para tanto, defina a função

$$\begin{aligned} \widehat{H} : \overline{A} \times [0,1] &\to E \times \mathbb{R} \\ (x,t) &\mapsto \widehat{H}(x,t) = (x,t) - (F(x,t),t), \end{aligned}$$

ou seja,

$$H(x,t) = (x - F(x,t), 0).$$

Agora, defina $\widehat{F} : U \times [0,1] \to E \times \mathbb{R}$ por

$$\widehat{F}(x,t) = (F(x,t), t).$$

Segue que

$$\widehat{H} = I - \widehat{F}.$$

Afirmação 2.5 $\widehat{F}$ *é compacta.*

De fato, primeiramente, F é compacta logo F é contínua, então $\widehat{F}$ é contínua. Tome, agora, uma sequência $(x_n, t_n) \subset \overline{A} \times [0,1]$. Como $[0,1]$ é compacto, existe uma subsequência $(t_{n_j}) \subset (t_n)$ tal que

$$\lim_{j \to \infty} t_{n_j} = t_0 \in [0,1].$$

Pela compacidade da aplicação F, existe uma subsequência $(x_{n_{j_k}}, t_{n_{j_k}}) \subset (x_n, t_{n_j})$ tal que

$$\lim_{k \to \infty} F(x_{n_{j_k}}, t_{n_{j_k}}) = y_0 \in E.$$

Logo,

$$\lim_{k \to \infty} \widehat{F}(x_{n_{j_k}}, t_{n_{j_k}}) = \lim_{k \to \infty} (F(x_{n_{j_k}}, t_{n_{j_k}}), t_{n_{j_k}}) = (y_0, t_0).$$

Portanto, $\widehat{F}$ é uma aplicação compacta.

Usando o Lema 2.3, segue que $\widehat{H}(\partial A \times [0,1])$ é um conjunto fechado, ou seja, $H(\partial A \times [0,1], 0)$ é um conjunto fechado em $E \times \mathbb{R}$, o que implica $H(\partial A \times [0,1])$ é um fechado em E. Como $y \notin H(\partial A \times [0,1])$, podemos concluir que $r > 0$.

Defina $K = \overline{F\left(\overline{A} \times [0,1]\right)} \subset E$. Pelo Corolário 2.1, existe um subespaço de dimensão finita $S_{\frac{r}{2}} \subset E$ e uma função contınua $g_{\frac{r}{2}} : K \to S_{\frac{r}{2}}$ verificando, para todo $x \in K$,

$$\|x - g_{\frac{r}{2}}\| < \frac{r}{2}.$$

Seja $H_1 : \overline{A} \times [0,1] \to E$ definida por

$$H_1(x,t) = x - g_{\frac{r}{2}}(F(x,t)).$$

Veja que, para todo $x \in \overline{A}$ e para todo $t \in [0,1]$,

$$\|H(x,t) - H_1(x,t)\| = \|x - F(x,t) - x + g_{\frac{r}{2}}(F(x,t))\|,$$

portanto

$$\|H(x,t) - H_1(x,t)\| = \|F(x,t) - g_{\frac{r}{2}}(F(x,t))\| < \frac{r}{2}.$$

Segue, para todo $t \in [0,1]$, que

$$\sup_{x \in \overline{A}} \|H(x,t) - H_1(x,t)\| < \frac{r}{2}.$$

Daí, aplicando o item P_5 acima, temos, para todo $t \in [0,1]$,

$$\deg_{LS}(H(\cdot,t),A,y) = \deg_{LS}(H_1(\cdot,t),A,y).$$

Seja $S \subset E$ um subespaço de dimensão finita contendo y e $\overline{g_{\frac{r}{2}}(F(\overline{A}\times[0,1]))}$. Aplicando a definição do grau de Leray-Schauder, podemos concluir que, para todo $t \in [0,1]$,

$$\deg_{LS}(H_1(\cdot,t),A,y) = \deg_{LS}(H_1(\cdot,t)|_{U\cap S}, A\cap S, y).$$

Finalmente, usando a Proposição 2.2, item (P_9), concluímos que

$$\deg_{LS}(H(\cdot,t),A,y)$$

não depende de t.

(P_8) - Para todo $n > \frac{1}{d(y,f(\partial A))}$, existe $T_n : \overline{A} \to E$ de dimensão finita tal que

$$\|T_n(x) - T(x)\| < \frac{1}{n}$$

para todo $x \in \overline{A}$, onde $T = I - f$. Sejam

$$S_n = span\{T_n(\overline{A}) \cup \{y\}\} \text{ e } A_n = A \cap S_n.$$

Assim,

$$\deg_{LS}(f,A,y) = \deg_B((I-T_n)|_{\overline{A}\cap S_n}, A_n, y).$$

Por hipótese $\deg_B((I-T_n)|_{\overline{A}\cap S_n}, A_n, y) \neq 0$ e aplicando a proposição 2.2 item (P_8), existe $x_n \in A_n$ tal que

$$x_n - T_n(x_n) = y. \tag{2.11}$$

Como $T|_{\overline{A}}$ é compacta e, para cada n, $x_n \in A$, então podemos assumir, sem perda de generalidade, que a sequência $T(x_n)$ converge para algum $p \in X$. Daí, por (2.11), (x_n) converge para $y + p \in \overline{A}$. Pela continuidade da função f, obtemos

$$f(p+y) = \lim_{x\to\infty} f(x_n) = \lim_{x\to\infty} [x_n - T(x_n)] = y.$$

Sabemos que $y \notin f(\partial A)$, portanto $p + y \in A$. Desta forma, a equação $f(x) = y$ admite a solução $p + y$ ■

Capítulo 3

Existência de soluções para uma classe de equações diferenciais fracionárias usando Teorema do Ponto fixo e Grau Topológico

Neste capítulo, seguimos fielmente as idéias abordadas no artigo [1]. Provamos a existência e unicidade de soluções para uma classe de equações diferenciais fracionárias não lineares de ordem $q \in (1, 2]$ com condições de fontreira integral. A saber:

$$(\mathcal{CP}) \begin{cases} {}^cD^q x(t) = f(x, t(x)), \quad 0 < t < 1, \quad 1 < q \leq 2 \\ x(0) = 0, \quad x(1) = \alpha \int_0^\eta x(s)ds, \quad 0 < \eta < 1, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde ${}^cD^q$ denota o operador derivada fracionária de Caputo de ordem q, a não linearidade $f : [0, 1] \times X \to X$ é contínua, e $\alpha \in \mathbb{R}$ é tal que $\alpha \neq 2/\eta^2$. Aqui, $(X, \|.\|)$ é um espaço de Banach e $\mathcal{C} = C([0, 1], X)$ denota o espaço de Banach de todas as funções contínuas de $[0, 1]$ em X dotadas com uma topologia de convergência uniforme com a norma denotada por $\|.\|$.

O primeiro resultado obtido a partir do Lema 1.3 é a unicidade de solução para o problema de valor de fronteira (3.1).

Lema 3.1 *Uma única solução do problema de valor de fronteira (3.1) é dada por*

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1} f(s,x(s))ds \\
&- \frac{2t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)}\int_0^1 (1-s)^{q-1} f(s,x(s))ds \\
&+ \frac{2\alpha t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)}\int_0^\eta \left(\int_0^s (s-m)^{q-1} f(m,x(m))dm\right) ds.
\end{aligned}
$$

Demonstração: Para algumas constantes $c_0, c_1 \in X$, temos

$$
x(t) = I^q f(t,x(t)) - c_0 - c_1 t = \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1} f(s,x(s))ds - c_o - c_1 t.
$$

Para $x = 0$ temos:

$$
\begin{aligned}
x(0) &= 0 \\
&= \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^0 (0-s)^{q-1} f(s,x(s))ds - c_0 - c_1 \cdot 0.
\end{aligned}
$$

Deste modo encontramos que $c_o = 0$. Logo

$$
x(t) = \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1} f(s,x(s))ds - c_1 \cdot t \tag{3.2}
$$

Sabemos que

$$
x(1) = \alpha\int_0^\eta x(s)ds, \quad 0 < \eta < 1.
$$

Fazendo uma substituição de $t = s$ e $s = m$, temos

$$
\begin{aligned}
x(1) = \alpha\int_0^\eta x(s)ds &= \alpha\int_0^\eta \left[\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^s (s-m)^{q-1} f(m,x(m))dm - c_1.s\right] ds \\
&= \alpha\int_0^\eta \left[\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^s (s-m)^{q-1} f(m,x(m))dm\right] ds - \alpha\int_0^\eta c_1.sds \\
&= \alpha\int_0^\eta \left[\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^s (s-m)^{q-1} f(m,x(m))dm\right] ds - \alpha c_1\int_0^\eta sds \\
&= \alpha\int_0^\eta \left[\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^s (s-m)^{q-1} f(m,x(m))dm\right] ds - \alpha c_1\left[\frac{s^2}{2}\right]_{s=0}^{s=\eta}
\end{aligned}
$$

ou seja

$$
x(1) = \alpha\int_0^\eta \left[\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^s (s-m)^{q-1} f(m,x(m))dm\right] ds - \alpha c_1\frac{\eta^2}{2}. \tag{3.3}
$$

Ao analisarmos $x(t)$ na condição de fronteira, para $t = 1$ obtemos

$$
x(1) = \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^1 (1-s)^{q-1} f(s,x(s))ds - c_1. \tag{3.4}
$$

Logo, de (3.3) e (3.4), tem-se

$$\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^1 (1-s)^{q-1} f(s,x(s))ds - c_1 \;=\; \alpha\int_0^\eta \left[\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^s (s-m)^{q-1} f(m,x(m))dm\right] ds - \alpha c_1 \frac{\eta^2}{2}$$

de onde segue que

$$\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^1 (1-s)^{q-1} f(s,x(s))ds - c_1 - \left[\alpha\int_0^\eta \left[\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^s (s-m)^{q-1} f(m,x(m))dm\right] ds - \alpha c_1 \frac{\eta^2}{2}\right] = 0$$

ou ainda

$$\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^1 (1-s)^{q-1} f(s,x(s))ds - \alpha\int_0^\eta \left[\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^s (s-m)^{q-1} f(m,x(m))dm\right] ds + \alpha c_1 \frac{\eta^2}{2} = c_1.$$

Subitraindo o termo $\alpha c_1 \frac{\eta^2}{2}$ de ambos os lados da última equação, obtem-se

$$c_1 - \alpha c_1 \frac{\eta^2}{2} = \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^1 (1-s)^{q-1} f(s,x(s))ds - \alpha\int_0^\eta \left[\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^s (s-m)^{q-1} f(m,x(m))dm\right] ds.$$

Daí,

$$\frac{c_1(2-\alpha\eta^2)}{2} = \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^1 (1-s)^{q-1} f(s,x(s))ds - \alpha\int_0^\eta \left[\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^s (s-m)^{q-1} f(m,x(m))dm\right] ds$$

e então

$$c_1 = \frac{2}{(2-\alpha\eta^2)}\left[\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^1 (1-s)^{q-1} f(s,x(s))ds - \alpha\int_0^\eta \left[\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^s (s-m)^{q-1} f(m,x(m))dm\right] ds\right].$$

Assim substituindo c_1 na equação 3.2 obtemos que

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1} f(s,x(s))ds \\ &- \frac{2t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)}\int_0^1 (1-s)^{q-1} f(s,x(s))ds \\ &+ \frac{2\alpha t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)}\int_0^\eta \left(\int_0^s (s-m)^{q-1} f(m,x(m))dm\right) ds. \end{aligned}$$

■

Tendo em vista o Lema 3.1, definimos um operador $\mathbf{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}x)(t) &= \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1} f(s,x(s))ds \\ &- \frac{2t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)}\int_0^1 (1-s)^{q-1} f(s,x(s))ds \\ &+ \frac{2\alpha t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)}\int_0^\eta \left(\int_0^s (s-m)^{q-1} f(m,x(m))dm\right) ds, \quad t \in [0,1]. \end{aligned}$$

Para provar os principais resultados, precisamos das seguintes condições

(A_1) $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x-y\|$, para todo $t \in [0,1]$, $L > 0$, $\quad x, y \in X$

(A_2) $\|f(t,x)\| \leq \mu(t)$, para todo $(t,x) \in [0,1] \times X$, e $\mu \in L^1([0,1], \mathbb{R}^+)$.

Por conveniência, vamos definir

$$\Lambda = \frac{1}{\Gamma(q+1)} \left(1 + \frac{2[(q+1) + |\alpha|\eta^{q+1}]}{|2 - \alpha\eta^2|(q+1)}\right). \tag{3.5}$$

3.1 Existência de solução através de ponto fixo em um espaço de Banach

Nesta seção demonstraremos um dos principais resultados deste trabalho.

Teorema 3.1 *Suponha que $f : [0,1] \times X \to X$ seja uma função conjuntamente contínua e satisfaça a hipótese (A_1) com $L < \dfrac{1}{\Lambda}$. Então o problema do valor de fronteira (3.1) tem uma única solução.*

Demonstração: Tomando $\sup\limits_{t \in [0,1]} |f(t,0)| = M$ e escolhendo $r \geq \dfrac{\Lambda M}{1 - L\Lambda}$, mostraremos que $\mathbf{F}\overline{B}_r \subset \overline{B}_r$, onde $\overline{B}_r(0) := \{x \in \mathcal{C} : \|x\| \leq r\}$. Para $x \in \overline{B}_r$, temos que

$$(\mathbf{F}x)(t) = (\mathbf{F}_1 x)(t) + (\mathbf{F}_2 x)(t) + (\mathbf{F}_3 x)(t)$$

onde

$$(\mathbf{F}_1 x)(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s, x(s)) ds, \tag{3.6}$$

$$(\mathbf{F}_2 x)(t) = -\frac{2t}{(2 - \alpha\eta^2)\Gamma(q)} \int_0^1 (1-s)^{q-1} f(s, x(s)) ds \tag{3.7}$$

e

$$(\mathbf{F}_3 x)(t) = \frac{2\alpha t}{(2 - \alpha\eta^2)\Gamma(q)} \int_0^\eta \left(\int_0^s (s-m)^{q-1} f(m, x(m)) dm \right) ds. \tag{3.8}$$

Como

$$\|(\mathbf{F}x)(t)\| \leq \|(\mathbf{F}_1 x)(t)\| + \|(\mathbf{F}_2 x)(t)\| + \|(\mathbf{F}_3 x)(t)\| \tag{3.9}$$

estimaremos os funcionais $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ e $\mathbf{F}_3$.

Temos que

$$\begin{aligned}
\|(\mathbf{F}_1 x)(t)\| &= \left\| \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s,x(s))ds \right\| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} \left\| f(s,x(s)) \right\| ds.
\end{aligned}$$

Usando a relação $|A-B|+|B| \geq |A|$, temos

$$\|(\mathbf{F}_1 x)(t)\| \leq \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} (\|f(s,x(s))-f(s,0)\| + \|f(s,0)\|)ds.$$

Usando a condição (A_1), $\sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t,0)| = M$ e $\|x\| \leq r$ iremos obter

$$\begin{aligned}
\|(\mathbf{F}_1 x)(t)\| &\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} (L||x(s)-0|| + ||f(s,0)||)ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} (Lr+M)ds \\
&= \frac{(Lr+M)}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} ds \\
&= \frac{(Lr+M)}{\Gamma(q)} \left[\frac{-(t-s)^q}{q} \right]_0^t \\
&= \frac{(Lr+M)}{\Gamma(q)} \left(\frac{t^q}{q} \right) \\
&\leq \frac{(Lr+M)}{\Gamma(q+1)}.
\end{aligned}$$

De modo análogo estimaremos $\mathbf{F}_2$, ou seja:

$$\begin{aligned}
\|(\mathbf{F}_2 x)(t)\| &= \left\| \frac{2t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)} \int_0^1 (1-s)^{q-1} f(s,x(s))ds \right\| \\
&= \left| \frac{2t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)} \right| \int_0^1 (1-s)^{q-1} ||f(s,x(s))|| ds \\
&\leq \left| \frac{2t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)} \right| \int_0^1 (1-s)^{q-1} (||f(s,x(s))-f(s,0)|| + ||f(s,0)||)ds \\
&\leq \left| \frac{2t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)} \right| \int_0^1 (1-s)^{q-1} (L||x(s)-0|| + ||f(s,0)||)ds \\
&\leq \left| \frac{2t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)} \right| \int_0^1 (1-s)^{q-1} (Lr+M)ds
\end{aligned}$$

e assim teremos

$$\begin{aligned}
\|(\mathbf{F}_2 x)(t)\| &\leq (Lr+M)\left[\left|\frac{2t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)}\right|\int_0^1 (1-s)^{q-1}ds\right] \\
&= (Lr+M)\left|\frac{2t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)}\right|\left[\frac{-(1-s)^q}{q}\right]_0^1 \\
&= (Lr+M)\left|\frac{2t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)}\right|\frac{1}{q} \\
&= \frac{(Lr+M)}{\Gamma(q+1)}\left|\frac{2t}{(2-\alpha\eta^2)}\right| \\
&\leq \frac{(Lr+M)}{\Gamma(q+1)}\left|\frac{2}{(2-\alpha\eta^2)}\right|.
\end{aligned}$$

Agora estimando $\mathbf{F}_3$ obtemos

$$\begin{aligned}
\|(\mathbf{F}_3 x)(t)\| &= \left\|\frac{2\alpha t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)}\int_0^\eta\left(\int_0^s (s-m)^{q-1}f(m,x(m))dm\right)ds\right\| \\
&= \left|\frac{2\alpha t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)}\right|\int_0^\eta\left(\int_0^s (s-m)^{q-1}||f(m,x(m))||dm\right)ds \\
&\leq \left|\frac{2\alpha t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)}\right|\int_0^\eta\left(\int_0^s (s-m)^{q-1}||f(m,x(m))-f(m,0)||+||f(m,0)||)dm\right)ds \\
&\leq \left|\frac{2\alpha t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)}\right|\int_0^\eta\left(\int_0^s (s-m)^{q-1}L||x(m)-0||+||f(m,0)||dm\right)ds \\
&\leq \left|\frac{2\alpha t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)}\right|\int_0^\eta\left(\int_0^s (s-m)^{q-1}(Lr+M)dm\right)ds \\
&= (Lr+M)\left|\frac{2\alpha t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)}\right|\int_0^\eta\left(\int_0^s (s-m)^{q-1}dm\right)ds \\
&= \frac{(Lr+M)}{\Gamma(q+1)}\left[\left|\frac{2\alpha t}{(2-\alpha\eta^2)}\right|\left(\frac{\eta^{q+1}}{q+1}\right)\right] \\
&\leq \frac{(Lr+M)}{\Gamma(q+1)}\left[\left|\frac{2\alpha}{(2-\alpha\eta^2)}\right|\left(\frac{\eta^{q+1}}{q+1}\right)\right].
\end{aligned}$$

Desse modo, por (3.9) e as estimativas de $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ e $\mathbf{F}_3$, teremos

$$\begin{aligned}
\|(\mathbf{F}x)(t)\| &\leq \frac{(Lr+M)}{\Gamma(q+1)} \\
&+ \frac{(Lr+M)}{\Gamma(q+1)}\left|\frac{2}{(2-\alpha\eta^2)}\right| \\
&+ \frac{(Lr+M)}{\Gamma(q+1)}\left[\left|\frac{2\alpha}{(2-\alpha\eta^2)}\right|\left(\frac{\eta^{q+1}}{q+1}\right)\right] \\
&= \frac{(Lr+M)}{\Gamma(q+1)}\left[1+\left|\frac{2}{(2-\alpha\eta^2)}\right|+\left|\frac{2\alpha}{(2-\alpha\eta^2)}\right|\left(\frac{\eta^{q+1}}{q+1}\right)\right] \\
&\leq \frac{Lr+M}{\Gamma(q+1)}\left(1+\frac{2[(q+1)+|\alpha|\eta^{q+1}]}{|2-\alpha\eta^2|(q+1)}\right) \\
&= (Lr+M)\Lambda \\
&\leq r.
\end{aligned}$$

Para $x, y \in \mathcal{C}$ e para cada $t \in [0,1]$ teremos o seguinte:

$$\begin{aligned}
\|(\mathbf{F}x)(t)-(\mathbf{F}y)(t)\| &= \left\|\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1} f(s,x(s))ds\right. \\
&- \frac{2t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)}\int_0^1 (1-s)^{q-1} f(s,x(s))ds \\
&+ \frac{2\alpha t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)}\int_0^\eta\left(\int_0^s (s-m)^{q-1} f(m,x(m))dm\right)ds \\
&- \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1} f(s,y(s))ds \\
&+ \frac{2t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)}\int_0^1 (1-s)^{q-1} f(s,y(s))ds \\
&- \left.\frac{2\alpha t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)}\int_0^\eta\left(\int_0^s (s-m)^{q-1} f(m,y(m))dm\right)ds\right\| \\
&= \left\|\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}(f(s,x(s))-f(s,y(s))ds\right. \\
&- \frac{2t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)}\int_0^1 (1-s)^{q-1}(f(s,x(s))-f(s,y(s)))ds \\
&+ \left.\frac{2\alpha t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)}\int_0^\eta\left(\int_0^s (s-m)^{q-1}(f(m,x(m))-f(m,y(m)))dm\right)ds\right\|,
\end{aligned}$$

assim usando desigualdade triângular temos que:

$$
\begin{aligned}
||(\mathbf{F}x)(t)-(\mathbf{F}y)(t)|| &\leq \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}||f(s,x(s))-f(s,y(s))||ds\\
&+ \left|\frac{2t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)}\right|\int_0^1 (1-s)^{q-1}||f(s,x(s))-f(s,y(s))||ds\\
&+ \left|\frac{2\alpha t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)}\right|\int_0^\eta \left(\int_0^s (s-m)^{q-1}||f(m,x(m))-f(m,y(m)||dm\right)ds
\end{aligned}
$$

usando (A_1) temos:

$$
\begin{aligned}
||(\mathbf{F}x)(t)-(\mathbf{F}y)(t)|| &\leq L||x-y||\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}ds\\
&+ L||x-y||\left|\frac{2t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)}\right|\int_0^1 (1-s)^{q-1}ds\\
&+ L||x-y||\left|\frac{2\alpha t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)}\right|\int_0^\eta \left(\int_0^s (s-m)^{q-1}dm\right)ds\\
&\leq \frac{L}{\Gamma(q+1)}\left(1+\frac{2[(q+1)+|\alpha|\eta^{q+1}]}{|2-\alpha\eta^2|(q+1)}\right)||x-y||\\
&= L\Lambda||x-y||,
\end{aligned}
$$

onde Λ é dado por (3.5). Observe que Λ depende apenas dos parâmetros envolvidos no problema. Como $L < 1/\Lambda$, implica que $L\Lambda < 1$ portanto $\mathbf{F}$ é uma contração. Assim pelo Teorema do Fixo de Banach, existe uma única solução para o problema. ■

Agora, provaremos a existência de soluções de (3.1) aplicando o teorema do ponto fixo de Krasnoselskii, onde primeiramente demonstraremos o Lema 3.2 necessário na demonstração do mesmo.

Lema 3.2 *Se B é uma aplicação de contração de um subconjunto X de um espaço normado S em S, então $I-B$ é um homeomorfismo em X para $(I-B)X$. Se $(I-B)X$ é pré-compacto, X também é.*

Demonstração: Claramente $I-B$ é contìnuo, pois B é contínuo e I também, assim

$$||(I-B)x-(I-B)y|| = ||x-Bx-y+By|| = ||(x-y)-(Bx-By)||.$$

Usando desigualdade triangular temos que

$$||(x-y)-(Bx-By)|| \geq ||x-y||-||Bx-By||$$

Como B é uma contraçao, temos que

$$\|Bx - By\| \leq k\|x - y\|$$

logo

$$||x - y|| - ||Bx - By|| \geq (1 - k)||x - y||$$

(onde $0 < k < 1$) de modo que $(I - B)^{-1}$ seja contínua, a mesma desigualdade mostra que $x_1, x_2, ..., x_n$ é uma extensão para X se

$$(I - B)x_1, (I - B)x_2, ..., (I - B)x_n$$

$(1 - k)$ é uma extensão para $(I - B)X$. ■

Teorema 3.2 *(Ponto fixo de Krasnoselskii's) Seja M um subconjunto convexo fechado e não vazio de um espaço de Banach X. Sejam A e B operadores tais que:*

(a) $Ax + By \in M$ para quaisquer $x, y \in M$;

(b) A é compacto e contínuo;

(c) B é uma aplicação de contração.

Então exite $z \in M$ tal que $z = Az + Bz$

Demonstração: Para cada $y \in M$ a equação

$$z = Bz + Ay$$

tem uma única solução $z \in M$, desde $z \to Bz + Ay$ define uma aplicação de contração de M em M. Por isso $z = (I - B)^{-1}Ay$ em M. Pelo Lema 3.2, $(I - B)^{-1}A$ é contínuo e compacto sobre M em M. Pelo Lema 2.1 $(I - B)^{-1}A$ tem um ponto fixo em M, este ponto y é o necessário. ■

Teorema 3.3 *Seja $f : [0, 1] \times X \to X$ uma função conjuntamente contínua que mapeia subconjuntos limitados de $[0, 1] \times X$ em subconjuntos relativamente compactos de X, e as hipóteses (A_1) e (A_2) ocorrem com*

$$\frac{L}{\Gamma(q+1)} \left(\frac{2[(q+1) + |\alpha|\eta^{q+1}]}{|2 - \alpha\eta^2|(q+1)} \right) < 1. \tag{3.10}$$

Então o problema de valor de fronteira (3.1) tem pelo menos uma solução em $[0, 1]$.

Demonstração: Tomando $\sup\limits_{t\in[0,1]} |\mu(t)| = ||\mu||$, fixamos

$$\overline{r} \geq \frac{||\mu||}{\Gamma(q+1)}\left(1 + \frac{2[(q+1) + |\alpha|\eta^{q+1}]}{|2-\alpha\eta^2|(q+1)}\right) \tag{3.11}$$

com $B_{\overline{r}} = \{x \in \mathcal{C} : ||x|| \leq \overline{r}\}$. Definimos os operadores $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sobre $B_{\overline{r}}$ como:

$$(\mathcal{P}x)(t) \ = \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s, x(s))ds$$

e

$$\begin{aligned}
(\mathcal{Q}x)(t) = \ & - \ \frac{2t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)}\int_0^1 (1-s)^{q-1} f(s,x(s))ds \\
& + \ \frac{2\alpha t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)}\int_0^\eta \left(\int_0^s (s-m)^{q-1} f(m,x(m))dm\right) ds.
\end{aligned}$$

Para $x, y \in B_{\overline{r}}$

$$\begin{aligned}
||\mathcal{P}x + \mathcal{Q}y|| \ &\leq \ \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}||f(s,x(s))||ds \\
&+ \ \left|\frac{2t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)}\right| \int_0^1 (1-s)^{q-1}||f(s,x(s))||ds \\
&+ \ \left|\frac{2\alpha t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)}\right| \int_0^\eta \left(\int_0^s (s-m)^{q-1}||f(m,x(m))||dm\right) ds \\
&\leq \ \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}||\mu||)ds \\
&+ \ \left|\frac{2t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)}\right| \int_0^1 (1-s)^{q-1}||\mu(t)||ds \\
&+ \ \left|\frac{2\alpha t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)}\right| \int_0^\eta \left(\int_0^s (s-m)^{q-1}||\mu(t)||dm\right) ds \\
&= \ ||\mu(t)|| \left[\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}ds + \left|\frac{2t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)}\right| \int_0^1 (1-s)^{q-1}ds\right] \\
&+ \ ||\mu(t)|| \left|\frac{2\alpha t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)}\right| \int_0^\eta \left(\int_0^s (s-m)^{q-1}dm\right) ds \\
&\leq \ \frac{||\mu||}{\Gamma(q+1)}\left(1 + \frac{2[(q+1) + |\alpha|\eta^{q+1}]}{|2-\alpha\eta^2|(q+1)}\right) \\
&\leq \ \overline{r}.
\end{aligned}$$

Assim $\mathcal{P}x + \mathcal{Q}y \in B_{\overline{r}}$. Segue da condição (A_1) que

$$
\begin{aligned}
\|(\mathcal{Q}x)(t)-(\mathcal{Q}y)(t)\| &= \left\|-\frac{2t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)}\int_0^1(1-s)^{q-1}(f(s,x(s))-f(s,y(s)))ds\right\| \\
&+ \left\|\frac{2\alpha t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)}\int_0^\eta\left(\int_0^s(s-m)^{q-1}(f(m,x(m))-f(m,y(m)))dm\right)ds\right\| \\
&\leq \left|\frac{2t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)}\right|\int_0^1(1-s)^{q-1}||f(s,x(s))-f(s,y(s))||ds \\
&+ \left|\frac{2\alpha t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)}\right|\int_0^\eta\left(\int_0^s(s-m)^{q-1}||f(m,x(m))-f(m,y(m)||dm\right)ds \\
&\leq L||x-y||\left|\frac{2t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)}\right|\int_0^1(1-s)^{q-1}ds \\
&+ L||x-y||\left|\frac{2\alpha t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)}\right|\int_0^\eta\left(\int_0^s(s-m)^{q-1}dm\right)ds \\
&\leq \frac{L}{\Gamma(q+1)}\left(\frac{2[(q+1)+|\alpha|\eta^{q+1}]}{|2-\alpha\eta^2|(q+1)}\right)||x-y||. \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

De (3.10) e (3.12), tem-se

$$\|(\mathcal{Q}x)(t)-(\mathcal{Q}y)(t)\| \leq ||x-y||$$

mostrando que $\mathcal{Q}$ é uma contração. A continuidade de f implica que o operador $\mathcal{P}$ é contínuo. Além disso, $\mathcal{P}$ é uniformemente limitado em $B_{\overline{r}}$ com

$$
\begin{aligned}
||(\mathcal{P}x)|| &= \left\|\int_0^t\frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}f(s,u(s))ds\right\| \\
&\leq \int_0^t\frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}||f(s,u(s))||ds \\
&\leq \int_0^t\frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}||\mu||ds \\
&= \frac{||\mu||}{\Gamma(q)}\int_0^t(t-s)^{q-1}ds \\
&= \left(\frac{||\mu||}{\Gamma(q)}\right)\frac{t^q}{q} \\
&\leq \frac{||\mu||}{\Gamma(q+1)}.
\end{aligned}
$$

Agora provaremos a compacidade do operador $\mathcal{P}$.

Tendo em vista (A_1) definimos $\sup\limits_{(t,x)\in[0,1]\times B_{\overline{r}}} |f(t,x)| = \overline{f}$, e consequentemente temos

$$\begin{aligned}
\|(\mathcal{P}x)(t_1) &- (\mathcal{P}x)(t_2)\| \\
&= \left\| \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{q-1} f(s, x(s))ds - \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{q-1} f(s, x(s))ds \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{t_1} \left[(t_2 - s)^{q-1} - (t_1 - s)^{q-1}\right] f(s, x(s))ds + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{q-1} f(s, x(s))ds \right\| \\
&\leq \frac{\overline{f}}{\Gamma(q+1)} |2(t_2 - t_1)^q + t_1^q - t_2^q|,
\end{aligned}$$

que é independente de x. Portanto, $\mathcal{P}$ é equicontínuo. Usando o fato de que f mapeia subconjuntos limitados em subconjuntos relativamente compactos, temos que $\mathcal{P}(\mathscr{A})(t)$ é relativamente compacto em X para todo t, onde $\mathscr{A}$ é um subconjunto limitado de $\mathcal{C}$. Então $\mathcal{P}$ é relativamente compacto em $B_{\overline{r}}$. Portanto, pelo Teorema de Arzelá-Ascoli, $\mathcal{P}$ é compacto em $B_{\overline{r}}$. Portanto, pelo teorema do ponto fixo de Krasnoselskii's o problema de valor de fronteira (3.1) tem pelo menos uma solução em $[0, 1]$. ■

3.2 Existência de solução através da teoria do grau de Leray-Schauder

O próximo resultado nos garante que sobre a condição $|f(t, x)| \leq k|x| + M$, o problema (3.1) admite pelo menos uma solução.

Teorema 3.4 *Seja* $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $[0, 1]$. *Suponhamos que existem constantes* $0 \leq k < 1/\Lambda$, *em que* Λ *é definido em (3.5) e* $M \geq 0$ *de modo que* $|f(t, x)| \leq k|x| + M$ *para todo* $t \in [0, 1], x \in \mathcal{C}[0, 1]$. *Então o problema de condição de fronteira (3.1) tem pelo menos uma solução.*

Demonstração: Vamos definir um operador $\mathcal{F} : \mathcal{C}[0, 1] \to \mathcal{C}[0, 1]$ dado por

$$x = \mathcal{F}x \tag{3.13}$$

onde

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}x)(t) &= \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1} f(s,x(s))ds \\ &- \frac{2t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)}\int_0^1 (1-s)^{q-1} f(s,x(s))ds \\ &+ \frac{2\alpha t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)}\int_0^\eta \left(\int_0^s (s-m)^{q-1} f(m,x(m))dm\right) ds.\end{aligned}$$

Tendo em conta o problema de ponto fixo (3.13), basta provarmos a existência de pelo menos uma solução $x \in \mathcal{C}[0,1]$ que satisfaça (3.13). Defina uma bola adequada $B_R \subset \mathcal{C}[0,1]$ com raio $R > 0$ onde

$$B_R = \left\{ x \in C[0,1] : \max_{t\in[0,1]} |x(t)| < R \right\} \tag{3.14}$$

em que R será fixado mais tarde. Basta então mostrar que $\mathcal{F} : \overline{B_R} \to \mathcal{C}[0,1]$ que satisfaça

$$x \neq \lambda \mathcal{F}x, \quad \forall x \in \partial B_R, \quad \forall \lambda \in [0,1]. \tag{3.15}$$

Vamos definir

$$H(\lambda, x) = \lambda \mathcal{F}x, \quad x \in C(\mathbb{R}), \quad \lambda \in [0,1]. \tag{3.16}$$

Então, pelo Teorema de Arzela-Ascoli, $h_\lambda = x - H(\lambda, x) = x - \lambda\mathcal{F}x$ é completamente contínuo. Se (3.15) for verdade, então os seguintes graus de Leray-Schauder estão bem definidos, e pela Proposição 2.3 item (P_6), segue-se que

$$\begin{aligned} deg(h_\lambda, B_R, 0) &= deg(I - \lambda\mathcal{F}, B_R, 0) = deg(h_1, B_R, 0) \\ &= deg(h_0, B_R, 0) = deg(I, B_R, 0) = 1 \neq 0, \quad 0 \in B_R \end{aligned}$$

em que I representa o operador identidade. Pela Proposição2.3-item (P_8), $h_1(t) = x - \lambda\mathcal{F}x = 0$ para pelo menos um $x \in B_R$. Para provar (3.15) assumimos que $x = \lambda\mathcal{F}x$ para algum $\lambda \in [0,1]$ e para todo $t \in [0,1]$ de modo que

$$\begin{aligned}|x(t)| &= |\lambda(\mathcal{F}x)(t)| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1} ||f(s,x(s))||ds \\ &+ \left|\frac{2t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)}\right| \int_0^1 (1-s)^{q-1} ||f(s,x(s))||ds \\ &+ \left|\frac{2\alpha t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)}\right| \int_0^\eta \left(\int_0^s (s-m)^{q-1} ||f(m,x(m))||dm\right) ds,\end{aligned}$$

daí,

$$\begin{aligned}
|x(t)| &\leq (k|x|+M)\left[\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}ds + \left|\frac{2t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)}\right|\int_0^1 (1-s)^{q-1}ds\right] \\
&+ (k|x|+M)\left|\frac{2\alpha t}{(2-\alpha\eta^2)\Gamma(q)}\right|\int_0^\eta \left(\int_0^s (s-m)^{q-1}dm\right)ds \\
&\leq \frac{k|x|+M}{\Gamma(q+1)}\left(1+\frac{2[(q+1)+|\alpha|\eta^{q+1}]}{|2-\alpha\eta^2|(q+1)}\right) \\
&= (k|x|+M)\Lambda
\end{aligned}$$

de onde tem-se

$$\|x\| \leq \frac{M\Lambda}{1-k\Lambda}.$$

Tomando $R = M\Lambda/(1-k\Lambda)+1$, (3.15) é válido e isto completa a prova. ■

3.3 Exemplos

Aprasentaremos nesta seção alguns exemplos usando os Teoremas 3.1 e 3.4 com não linearidade f específica.

Exemplo 3.1 *Considere-se o seguinte problema de valor de fronteira de uma integral fracionária*

$$\begin{cases} {}^cD^{3/2}x(t) = \dfrac{1}{(t+9)^2}\dfrac{\|x\|}{1+\|x\|}, \quad t \in [0,1] \\ x(0) = 0, \quad x(1) = \displaystyle\int_0^{3/4} x(s)ds. \end{cases} \tag{3.17}$$

Aqui $q = 3/2, \alpha = 1, \eta = 3/4$ *e* $f(t,x) = (t/(t+9)^2)(\|x\|/(1+\|x\|))$. *Temos que*

$$\begin{aligned}
\|f(t,x)-f(t,y)\| &= \left\|\frac{1}{(t+9)^2}\frac{\|x\|}{1+\|x\|} - \frac{1}{(t+9)^2}\frac{\|y\|}{1+\|y\|}\right\| \\
&\leq \left\|\frac{1}{81}\frac{\|x\|}{1+\|x\|} - \frac{1}{81}\frac{\|y\|}{1+\|y\|}\right\| \\
&\leq \left\|\frac{\|x\|}{81} - \frac{\|y\|}{81}\right\| \\
&= \frac{1}{81}\|x-y\|
\end{aligned}$$

portanto (A_1) *é satisfeita com* $L_1 = 1/81$. *Além disso*

$$\begin{aligned} L\Lambda &= \frac{L}{\Gamma(q+1)}\left(1+\frac{2[(q+1)+|\alpha|\eta^{q+1}]}{|2-\alpha\eta^2|(q+1)}\right) \\ &= \frac{4}{81\cdot 3\sqrt{\pi}}\left(1+\frac{2[5/2+(3/4)^{5/2}]}{[2-(3/4)^2](5/2)}\right) \\ &= \frac{4}{81\cdot 3\sqrt{\pi}}\left(\frac{275+2\cdot 3^{5/2}}{115}\right) \\ &= \frac{4}{27945\sqrt{\pi}}(275+18\sqrt{3}) < 1 \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema 3.1, o problema de valor de fronteira (3.17) tem uma solução única solução única em $[0,1]$.

Exemplo 3.2 *Considere o seguinte problema de condição de fronteira:*

$$\begin{cases} {}^cD^{3/2}x(t) = \dfrac{1}{4\pi} sen\,(2\pi x) + \dfrac{|x|}{1+|x|}, \quad t\in[0,1], \quad 1<q\leq 2 \\ x(0)=0, \quad x(1) = \displaystyle\int_0^{1/2} x(s)ds. \end{cases} \tag{3.18}$$

Aqui temos que $q = 3/2, \alpha = 1, \eta = 1/2$ *e*

$$|f(t,x)| = \left|\frac{1}{4\pi} sen\,(2\pi x) + \frac{|x|}{1+|x|}\right| \leq \frac{1}{2}|x| + 1.$$

É claro que $M = 1$ *e*

$$k = \frac{1}{2} < \frac{1}{\Lambda} = \frac{105\sqrt{2\pi}}{4(75\sqrt{2}+4)} = 0,5978138748.$$

Assim, todas as condições do Teorema 3.4 são satisfeitas e, consequentemente, o problema de valor de fronteira (3.18) tem pelo menos uma solução.

Considerações finais

O intuito desse trabalho de conclusão de curso é abordar sobre o estudo do Cálculo Fracionário, mais especificamente, existência de solução para uma classe de equações diferenciais fracionárias abordadas em [1].

Para tanto foi necessário o uso de resultados de análise na reta, espaços métricos, análise funcional, grau topológico, e etc. Os teoremas de Arzelá-Ascoli e do Ponto Fixo de Banach, foram ferramentas chaves para demonstração de alguns dos resultados principais, resultados esses que não são abordados em um curso de graduação.

Tendo em vista o Cálculo Fracionário não fazer parte do currículo dos cursos de graduação em Matemática e ser uma área de pesquisa estudada por pesquisadores de ponta, gostariamos de enfatizar a importância desse trabalho no meio acadêmico.

Por fim, esperamos que este trabalho, venha a contribuir no estudo de discentes que estejam interessados em estudar o cálculo fracionário.

Bibliografia

[1] AHMAD, B., NTOUYAS, S.K. e ALSAEDI, A. **New Existence Results for Nonlinear Fractional Differential Equations with Three-Point Integral Boundary Conditions**. Adv Differ Equ 2011, 107384 (2011).

[2] ALMEIDA, Orlando Batista de. **Teoria do Grau e Aplicações**. Campina Grande: Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2006.

[3] BIEZUNER, Rodney Josué. **Análise Funcional**. Notas de aula do curso Análise Funcional do Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2009.

[4] CAPUTO, M. **Elasticit'a e Dissipazione**. Zanichelli, Bologna, (1969).

[5] CHAE, S. B. **Lebesgue Integration**. Springer-Verlag, New York, 1995.

[6] DIETHELM, K. **The Analysis of Fractional Differential Equations**. An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type. Springer, 2010.

[7] FIGUEIREDO CAMARGO, R. **Cálculo Fracionário e Aplicações**. Tese de Doutorado, Imecc-Unicamp, 2009.

[8] FIGUEIREDO CAMARGO, R.; CAPELAS DE OLIVEIRA, E. **Cálculo Fracionário**. Editora Livraria da Física, São Paulo, 2015.

[9] GOMES, Jonas da Cunha. **Sobre teoremas de ponto fixo e aplicações em problemas elípticos**. Marabá, 2020.

[10] JUNIOR, José Carlos A. M. **O Grau Topológico de Brouwer e Aplicações**. João Pessoa, 2010.

[11] LIMA, Elon Lages. **Análise Real**. Vol.1. Funções de uma variável, 10. ed. Rio de Janeiro, IMPA, 2009.

[12] LIMA, Elon Lages. **Análise Real**. Vol.2. Funções de n variáveis, 1. ed. Rio de Janeiro, IMPA, 2014.

[13] LIMA, Elon Lages. **Curso de análise**. vol.1. 12.ed. - Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2009.

[14] LIMA, Elon Lages. **Espaços Métricos**. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2014.

[15] MACHADO FILHO, Aurílio Rodrigues. **Teoria do Grau e Aplicações**. João Pessoa, 2022.

[16] OLIVEIRA, Misaelle do Nascimento. **O Teorema de Arzelá-Ascoli e aplicações**. 2014. 49f. Monografia (Especialização em Matemática Pura e Aplicada)- Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2014.

[17] PEIXOTO,Adriano Leandro da Costa. **A construção do grau topológico e sua aplicação a um sistema diferencial não linear com condições de contorno**. 2014. Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

[18] RODRIGUES, Fábio G. **Introdução às técnicas do cálculo fracionário para estudar modelos da física matemática**. Revista Brasileira de Ensino de Física, 2015.

[19] SMART, D.R. **Fixed Point Theorems**. Volume 66 de Cambridge Tracts in Mathematics, 1980.

[20] SPIVAK, Michael. **Calculus on Manifolds**. Benjamim, New York, 1965.

[21] TORELLI , Pedro Gabriel Papa. **Uma Introdução ao Cálculo Fracionário e sua Aplicação ao Problema das Equações de Onda-Difusão Tempo-Fracionárias** . Maringá: Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2021.